

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## **DIPLOMSKI RAD**

Matko Tomić

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## **DIPLOMSKI RAD**

Mentor:

Prof.dr.sc. Josip Kasać

Student:

Matko Tomić

Zagreb, 2017.

*Zagledaj se duboko,  
duboko u prirodu,  
i tada ćeš sve bolje razumjeti.*

**A.Einstein**

## **Izjava**

*Izjavljujem da sam ovaj diplomski rad radio samostalno na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu, znanjem stečenim tijekom studija.*

*M. T.*

## **Zahvala**

*Zahvaljujem se mentoru prof.dr.sc. Josipu Kasaću na iskazanom povjerenju, vodstvu i korisnim diskusijama tijekom izrade ovog rada.*

*Na kraju, najviše bih se zahvalio svojoj obitelji na strpljenju i povjerenju koje su mi ukazali, te naročito svojoj baki Meliti na moralnoj podršci kroz čitav moj dosadašnji život. Posebno se zahvaljujem svojoj djevojci Lei koja je uvijek bila uz mene, i neumorno slušala o mojim "mušicama".*

*M. T.*



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur. broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Matko Tomić** Mat. br.: 0036457453

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Perturbacijska metoda homotopije u teoriji upravljanja hamiltonskih sustava**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Homotopy Perturbation Method in Control Theory of Hamiltonian Systems**

Opis zadatka:

Zadnjih dvadesetak godina pojavila se nova paradigma upravljanja dinamičkim sustavima zasnovana na reprezentaciji dinamike fizikalnih sustava u obliku kanonskih hamiltonskih diferencijalnih jednadžbi. Ključna prednost navedene reprezentacije je u tome da je hamiltonijan ujedno i Lyapunovljeva funkcija sustava, omogućujući trivijalnu analizu stabilnosti bez obzira na nelinearnost i složenost sustava. Sinteza regulatora svodi se na problem određivanja uvjeta hamiltonske strukture zatvorenog regulacijskog kruga. U ovom radu primjenjuje se perturbacijska metoda homotopije za sintezu regulacijskih sustava s hamiltonskom strukturom.

U radu je potrebno:

- izvesti osnovne teorijske rezultate vezane za teoriju hamiltonskih sustava, uključujući teoriju disipativnih dinamičkih sustava te Lyapunovljevu analizu stabilnosti
- izvesti osnovne teorijske rezultate vezane za perturbacijsku metodu homotopije te ilustrirati metodu na jednostavnim linearnim sustavima s poznatim analitičkim rješenjem primjenom programskog paketa Maple
- primijeniti perturbacijsku metodu homotopije na rješavanje parcijalne diferencijalne jednadžbe koja definira nužni uvjet pasivnosti zatvorenog regulacijskog kruga hamiltonskih sustava
- izvesti dinamički model sinkronog generatora i njegovu hamiltonsku reprezentaciju
- primijeniti perturbacijsku metodu homotopije na sintezu pasivnog hamiltonskog regulatora sinkronog generatora
- usporediti performanse upravljačkih algoritama dobivenih perturbacijskom metodom homotopije s konvencionalnim regulatorima.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

28. rujna 2017.

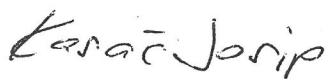
Datum predaje rada:

30. studenog 2017.

Predviđeni datum obrane:

6., 7. i 8. prosinca 2017.

Zadatak zadao:

  
Izv. prof. dr. sc. Josip Kasać

Predsjednica Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Biserka Runje

---

# Sadržaj

Sadržaj	v
Sažetak	vii
Summary	viii
Popis oznaka	ix
Popis slika	xi
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Lyapunovljeva analiza stabilnosti</b>	<b>3</b>
2.1 Definicije stabilnosti . . . . .	4
2.2 Lyapunovljeva funkcija i direktna Lyapunovljeva metoda . . . . .	6
2.3 LaSalleov princip inavarijantnosti . . . . .	13
<b>3 Disipativnost i pasivnost nelinearnih dinamičkih sustava</b>	<b>18</b>
3.1 Disipativnost nelinearnih dinamičkih sustava . . . . .	19
3.2 Pasivnost nelinearnih dinamičkih sustava . . . . .	22
3.3 Hill-Moylandovi uvjeti nelinearnih afinih sustava . . . . .	26
3.4 Stabilnost pasivnih nelinearnih dinamičkih sustava . . . . .	29

<b>4</b>	<b>Hamiltonski sustavi</b>	<b>32</b>
4.1	Euler-Lagrangeove i Hamiltonove jednadžbe . . . . .	32
4.2	Pasivnost i disipativnost Hamiltonskih sustava . . . . .	34
4.3	Port-controlled Hamiltonski sustavi . . . . .	37
4.4	Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control (IDA-PBC)	42
<b>5</b>	<b>Perturbacijska metoda homotopije</b>	<b>45</b>
5.1	Standardna perturbacijska metoda . . . . .	45
5.2	He'ova perturbacijska metoda homotopije . . . . .	52
5.3	Primjena He'ove perturbacijske metode homotopije . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Sinteza algoritma za upravljanje Hamiltonskim sustavima</b>	<b>64</b>
6.1	O energetskim sustavima . . . . .	64
6.2	Sinteza IDA-PBC algoritma upravljanja primjenom He'ove perturbacijske me- tode homotopije . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Simulacijski rezultati</b>	<b>74</b>
<b>8</b>	<b>Zaključak</b>	<b>85</b>
	<b>Literatura</b>	<b>87</b>

---

## Sažetak

Zadnjih dvadesetak godina, pojavila se nova paradigma u teoriji upravljanja dinamičkih sustava, zasnovana na reprezentaciji dinamike sustava u obliku kanonskih Hamiltonskih diferencijalnih jednadžbi. Totalni Hamiltonijan sustava je ujedno i Lyapunovljeva funkcija sustava, što omogućuje trivijalnu analizu stabilnosti, bez obzira na kompleksnost sustava. Sinteza regulatora se svodi na problem definiranja uvjeta Hamiltonske strukture zatvorenog regulacijskog kruga. U ovom radu primjenjena je navedena upravljačka metoda na problem stabilizacije sinkronog generatora. Kako bismo odredili upravljačku varijablu koja će stabilizirati nelinearni model sinkronog generatora, potrebno je riješiti odgovarajuću parcijalnu diferencijalnu jednadžbu. Za rješavanje navedene jednadžbe, primjenjena je perturbacijska metoda homotopije. Predložena je nova konveksna homotopija, za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi bez poznatih početnih i rubnih uvjeta. Provedena je usporedba simulacijskih rezultata konvencionalnog i predloženog upravljačkog algoritma.

**Ključne riječi:** Perturbacijska metoda homotopije, Lyapunovljeva analiza stabilnosti, Hamiltonski sustavi, nelinearni sustavi, parcijalne diferencijalne jednadžbe, disipativnost i pasivnost dinamičkih sustava

U Zagrebu, studenog, 2017.

*M. T.*



---

# Summary

In the last twenty years, there has been a new paradigm in control theory of dynamical systems. Representation of dynamical system is based on the canonical Hamilton's equations. Total Hamiltonian function of the system is also Lyapunov function of the system, which allows trivial stability analysis, regardless of complexity and nonlinearity of the system. Synthesis of control algorithm is based on defining closed loop port-controlled Hamiltonian structure. In this thesis, proposed control algorithm for stabilization of nonlinear model of synchronous generator was used. To determine control variable for nonlinear model of synchronous generator, we must solve corresponding partial differential equation. Proposed method for solving partial differential equation is homotopy perturbation method. New convex homotopy has been proposed for solving partial differential equations without known initial and boundary conditions. A comparison between the conventional and proposed control algorithm was performed.

**Key words:** Homotopy perturbation method, Lyapunov stability analysis, port-controlled Hamiltonian systems, nonlinear systems, partial differential equations, dissipativity and passivity theory for dynamical systems.

In Zagreb, November, 2017.

*M. T.*

---

## Popis oznaka

Oznaka	Mjerna jedinica	Opis
$t$	s	Vrijeme
$\mathbf{u}$		Vektor upravljanja
$\mathbf{x}$		Vektor stanja sustava
$\mathbf{y}$		Vektor mjerenih izlaza sustava
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$		Nelinearni dinamički sustav
$V(\mathbf{x})$		Lyapunovljeva funkcija
$\mathbf{0}$		Nul matrica
$\mathbb{R}$		Skup realnih brojeva
$\mathbb{R}^n$		$n$ -dimenzionalni vektorski prostor
$\mathbb{R}_+$		Skup nenegativnih realnih brojeva
$\mathcal{H}_{(\cdot)}$		Hilbertovi prostori
$\mathcal{L}_{(\cdot)}$		Lebesguevi prostori
$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	J	Lagrangian
$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$	J	Hamiltonian sustava
$\mathcal{H}_d(\mathbf{x})$	J	Željeni Hamiltonian sustava
$\mathcal{J}(\mathbf{x})$		Matrica unutarnjih strukturnih veza

$\mathcal{R}(\mathbf{x})$		Disipacijska matrica
$\mathcal{J}_d(\mathbf{x})$		Željena matrica unutarnjih strukturnih veza
$\mathcal{R}_d(\mathbf{x})$		Željena disipacijska matrica
$\mathbf{g}(\mathbf{x})$		Ulazna matrična funkcija
$\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})$		Lijevi anihilator
$\mathbf{q}$	rad, m	Vektor poopćenih (upravljanih) koordinata
$\dot{\mathbf{q}}$	rad/s, m/s	Poopćena brzina
$\ddot{\mathbf{q}}$	rad/s <sup>2</sup> , m/s <sup>2</sup>	Poopćeno ubrzanje
$\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$		Vektor poopćenih impulsa
$\mathcal{R}(\dot{\mathbf{q}})$	J/s	Rayleighova disipacijska funkcija
$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	J	Kinetička energija
$V(\mathbf{q})$	J	Potencijalna energija
$\mathbf{u}$	N, N m	Vektor sila/momenata u upravljanim koordinatama
$p$		Ugradbeni parametar u homotopiji
$\mathcal{H}(v, p)$		Homotopija
$b_i, i = 1, \dots, 4$		Parametri modela sinkronog generatora
$P$	p.u	Mehanička snaga
$E$	p.u	Napon beskonačnog čvora u mreži

**Napomena:** Sve gore navedene oznake, kao i preostale, objašnjene su detaljnije u tekstu na mjestu pojavljivanja.

---

## Popis slika

2.1	Pozitivno definitna funkcija (a) i pozitivno semidefinitna funkcija (b) . . . . .	8
2.2	Stabilnost, asimptotska stabilnost, nestabilno ravnotežno stanje . . . . .	10
2.3	Vizualni prikaz skupova korištenih u dokazu Teorema 2.1 . . . . .	10
6.1	Schema sinkronog generatora . . . . .	64
7.1	Stabilizacija varijable stanja $x_1$ primjenom upravljačkog algoritma iz [3] . . . . .	75
7.2	Stabilizacija varijable stanja $x_2$ primjenom upravljačkog algoritma iz [3] . . . . .	76
7.3	Stabilizacija varijable stanja $x_3$ primjenom upravljačkog algoritma iz [3] . . . . .	76
7.4	Stabilizacija varijable stanja $x_1$ primjenom upravljačkog algoritma (7.3) . . . . .	77
7.5	Stabilizacija varijable stanja $x_2$ primjenom upravljačkog algoritma (7.3) . . . . .	78
7.6	Stabilizacija varijable stanja $x_3$ primjenom upravljačkog algoritma (7.3) . . . . .	78
7.7	Asimptotska stabilnost sustava (6.1) primjenom upravljačkog algoritma (7.3) . . .	79
7.8	Nestabilna varijabla stanja $x_1$ primjenom upravljačkog algoritma [3] . . . . .	80
7.9	Nestabilna varijabla stanja $x_2$ primjenom upravljačkog algoritma [3] . . . . .	81
7.10	Nestabilna varijabla stanja $x_3$ primjenom upravljačkog algoritma [3] . . . . .	81
7.11	Stabilizacija varijable stanja $x_1$ primjenom upravljačkog algoritma (7.3) . . . . .	82
7.12	Stabilizacija varijable stanja $x_2$ primjenom upravljačkog algoritma (7.3) . . . . .	83
7.13	Stabilizacija varijable stanja $x_3$ primjenom upravljačkog algoritma (7.3) . . . . .	83
7.14	Asimptotska stabilnost sustava (6.1) primjenom upravljačkog algoritma (7.3) . . .	84

## Uvod

Tema ovog diplomskog rada je rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u teroiji upravljanja Hamiltonskih sustava za klasu nelinearnih dinamičkih sustava. Metoda koja će se koristiti u ovom radu je perturbacijska metoda homotopije (engl. *homotopy perturbation method*) koju je prvi puta postavio kineski matematičar Ji Huan He 1999. godine [7]. U ovom radu ćemo se osvrnuti na cjelokupnu problematiku određivanja upravljačkog algoritma za stabilan rad sustava, temeljenog na energiji Hamiltonskih sustava.

Konkretno, pokazat ćemo osnovna načela teorije stabilnosti koja je postavio ruski matematičar Aleksandar Mikhaljovich Lyapunov. Lyapunov je postavio skalarnu funkciju  $V(\mathbf{x})$  koja se može smatrati energijom sustava. Uvjeti koje bi funkcija trebala zadovoljiti kako bi bila Lyapunovljeva, temelje se na matematičkim, umjesto na fizikalnim načelima Lagrangeove mehanike<sup>1</sup>.

Dva uvjeta koja se moraju zadovoljiti, kako bi se sustav ponašao stabilno su: funkcija  $V(\mathbf{x})$  mora biti pozitivno definitna i vremenska derivacija  $\dot{V}(\mathbf{x})$  mora biti negativno semidefinitna. Kod razmatranja stabilnosti nelinearnih sustava potrebno je ispuniti i treći uvjet: funkcija  $V(\mathbf{x})$  mora biti radijalno neograničena, tj. mora  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  kada  $t \rightarrow \infty$ .

Svi realni sustavi spadaju u kategoriju disipativnih, tj. pasivnih sustava. Dok se svi elektro-mehanički sustavi mogu modelirati Euler-Lagrangeovim jednadžbama.

Pokazat ćemo da jednadžbe gibanja svih realnih sustava imaju specijalnu, tzv. Hamiltonsku strukturu, koju je prvi formulirao irski matematičar i fizičar Sir William Rowan Hamilton

---

<sup>1</sup>Prema Lagrangeu, ako je funkcija konzervativnog mehaničkog sustava na lokalnom minimumu, ravnotežno stanje je stabilno, a ako je na lokalnom maksimumu stanje je nestabilno.

1883. godine. U ovom radu ćemo se baviti Hamiltonskim sustavima u PCH formi (engl. *port-controlled Hamiltonian systems*). Prilikom upravljanja PCH sustavima, cilj je da regulacijski sustav, osim stabilizacije, ostaje i dalje PCH sustav. Ideja koja stoji iza algoritma je da željeni *Hamiltonian*  $\mathcal{H}_d^2$  koji ima minimum u ravnotežnoj točki  $\mathbf{x}^*$  bude ujedno i Lyapunovljeva funkcija čija je derivacija negativno semidefinitna. Asimptotska stabilnost sustava dokazuje se pozivanjem na LaSalleov princip invarijantnosti.

Upravljački algoritam korišten u ovom radu je IDA-PBC (engl. *Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control*). Ideja koja stoji iza algoritma je, da se *Poissonova strukturna matrica*  $\mathcal{J}$  koja ima svojstvo antisimetričnosti, i disipacijska matrica  $\mathcal{R}$  oblikuju na način, da struktura zatvorenog sustava bude očuvana i da energija sustava u zatvorenom krugu bude jednaka razlici između energije prirodnog sustava i energije kontrolera. Iako je ideja energijskog upravljanja sustavima intuitivna, ključni dio definiranja upravljačkog algoritma je rješavanje parcijalne diferencijalne jednadžbe, što predstavlja problem kod algoritama temeljenih na energiji sustava. Upravo ćemo problem rješavanja parcijalne diferencijalne jednadžbe riješiti uz pomoć perturbacijske metode homotopije.

---

<sup>2</sup>Hamiltonian  $\mathcal{H}$  predstavlja ukupnu energiju sustava, dok u Lagrangeovoj mehanici, Lagrangian  $\mathcal{L}$  predstavlja razliku totalne kinetičke energije i potencijalne energije. Hamiltoninan je zapravo *Legenderova transformacija* Lagrangiana, kada  $\mathbf{q}$  i  $t$  fiksiramo, a  $\mathbf{p}$  promatramo kao dual varijablu.

## Lyapunovljeva analiza stabilnosti

Jedan od osnovnih problema i zahtjeva u općoj teoriji sustava je stabilnost dinamičkih sustava. Ako sustav nije stabilan, nema smisla postavljati dodatne zahtjeve koji se odnose na kvalitetu ponašanja dinamičkog sustava (prijelazno i stacionarno stanje). Ako sustav ima jedno ravnotežno stanje (linearni sustavi) govorimo o *stabilnosti sustava*. Nelinearni sustavi imaju više ravnotežnih stanja pa možemo koristiti pojam *stabilnost ravnotežnih stanja*. Stabilnost nelinearnih sustava ovisi o početnim uvjetima, dok kod linearnih sustava ne ovisi. U konačnici, za sustav se može reći da je stabilan, jedino ako su sva moguća ravnotežna stanja stabilna.

U ovom poglavlju razmotrit ćemo koncepte stabilnosti dinamičkih sustava koje je postavio ruski matematičar Aleksandar Mikhajlovich Lyapunov. Svoje teoreme prvi puta je dokazao u svojoj doktorskoj disertaciji [10] koju je obranio 1892. godine na Sveučilištu u Moskvi. Kod Lyapunovljeve analize stabilnosti promatra se ponašanje sustava u okolišu ravnotežnog stanja. Analizi stabilnosti dinamičkih sustava pristupa se preko prve (indirektne) i druge (direktne) metode.

Prilikom analize stabilnosti preko prve Lyapunovljeve metode, primjenjuje se razvoj nelinearnog sustava u Taylorov red u okolišu ravnotežnog stanja uz zanemarivanje članova višeg reda. Analizom stabilnosti lineariziranog sustava zaključujemo (ne)stabilnost početnog nelinearnog sustava.

Druga metoda je općenitija, te polazi od koncepta ukupne energije sustava u klasičnoj mehanici, te na osnovu općenitog gledišta, Lyapunov izvodi drugu (direktnu) metodu [8].

Lyapunovljevi teoremi daju dovoljne, ali ne i nužne uvjete stabilnosti dinamičkog sustava. Isto tako, ne daju nikakve informacije o kvaliteti prijelaznog procesa i fizikalnim karakteristikama sustava, o čemu treba voditi računa kod primjene navedenih teorema.

## 2.1 Definicije stabilnosti

Razmotrimo problem stabilnosti nelinearnog sustava opisanog vektorskom diferencijalnom jednačinom

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \forall t \geq 0, \quad \mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

gdje su:  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  n-dimenzijski vektor stanja,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  m-dimenzijski vektor pobude,  $t \in \mathbb{R}_+$  vrijeme,  $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  n-dimenzijski vektor nelinearnih kontinuiranih funkcija.

**Definicija 2.1 (Pobuđeni i nepobuđeni sustav).** *Za kontinuirani sustav kažemo da je pobuđen ako ima pobudu  $\mathbf{u}(t)$ , tj. ako ga možemo prikazati u sljedećoj formi:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \forall t \geq 0, \quad \mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

*Kontinuirani sustav je nepobuđen, ako na njega ne djeluje nikakva pobuda, tj. ako je prepusten sam sebi, te ga možemo prikazati sljedećim izrazom:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \forall t \geq 0, \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

**Definicija 2.2 (Ravnatežno stanje).** *Ravnatežno stanje je stanje sustava u kojem sustav miruje, ako na njega ne djeluje pobuda  $\mathbf{u}(t)$ . Notacija vektora ravnatežnog stanja dinamičkog sustava je  $\mathbf{x}_e(t) \in \mathbb{R}^n$ , u kojem sustav ostaje, ako je sustav u početnom trenutku bio u ravnatežnom stanju  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_e$ .*



**Definicija 2.3** (Trajektorija stanja ili rješenje sustava). *Nepobuđeni sustav opisan je sljedećom vektorskom diferencijalnom jednažbom:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \forall t \geq 0, \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

gdje su:  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , kontinuirana funkcija  $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ima jednoznačnu trajektoriju, tj. rješenje, za svaki početni uvjet  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , gdje je  $\mathbf{x}_e \neq \mathbf{x}_0$ . Rješenje sustava se može opisati sa:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (2.5)$$

gdje je funkcija  $\mathbf{s} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Trajektorija stanja, ako je rješenje, mora zadovoljiti svoju diferencijalnu jednažbu:

$$\dot{\mathbf{s}}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(t, \mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0)), \quad \forall t \geq 0, \quad \mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0. \quad (2.6)$$

Trajektorija stanja ima sljedeća svojstva:

- $\mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n,$
- $\mathbf{s}(t, t_1, \mathbf{s}(t_1, t_0, \mathbf{x}_0)) = \mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0), \quad \forall t \geq t_1 \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n.$

Nakon što smo uveli neke osnovne pojmove iz teorije stabilnosti sustava, postaviti ćemo uvjete stabilnosti ravnotežnih stanja u smislu Lyapunova, te ćemo razmotriti ponašanje sustava, kada njegovo početno stanje nije ravnotežno, već kada je u njegovom okolišu.

**Definicija 2.4** (Stabilnost u smislu Lyapunova). *Ravnotežno stanje stabilno je u smislu Lyapunova ako za svaki  $\varepsilon > 0$  i svaki  $t \in \mathbb{R}_+$  postoji  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  takav da vrijedi:*

$$\|\mathbf{x}_e\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|\mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon. \quad (2.7)$$

**Definicija 2.5** (Asimptotska stabilnost u smislu Lyapunova). *Ravnotežno stanje je asimptotski stabilno ako za svaki  $\varepsilon > 0$  i svaki  $t \in \mathbb{R}_+$  postoji  $\delta = \delta(t_0) > 0$  takav da vrijedi*

sljedeći uvjet:

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta(t_0) \Rightarrow \|\mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| \rightarrow 0, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.8)$$

Stanje sustava tada teži ravnotežnom stanju iz kojeg je bilo poremećeno kada  $t \rightarrow 0$ . Za asimptotsku stabilnost stoga vrijedi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = \mathbf{x}_e = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

**Definicija 2.6 (Uniformna stabilnost).** *Ravnotežno stanje je uniformno stabilno ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  takav da vrijedi sljedeći uvjet:*

$$\|\mathbf{x}_e\| < \delta(\varepsilon), \quad t \geq t_0 \Rightarrow \|\mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.10)$$

**Definicija 2.7 (Eksponecijalna stabilnost).** *Ravnotežno stanje je eksponecijalno stabilno ako postoje  $\delta = \delta(t_0) > 0$ ,  $\alpha = \alpha(t_0) > 0$ ,  $\beta = \beta(t_0) > 0$  takve da vrijedi sljedeći uvjet:*

$$\|\mathbf{x}_e\| \leq \delta \Rightarrow \|\mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq \beta \|\mathbf{x}_0\| e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.11)$$

Vektorska norma  $\|\cdot\|$  u definicijama stabilnosti predstavlja bilo koju normu u  $\mathbb{R}^n$ , a zbog topološke ekvivalentnosti na  $\mathbb{R}^n$ , stabilnost ravnotežnog stanja ne ovisi o tipu norme.

## 2.2 Lyapunovljeva funkcija i direktna Lyapunovljeva metoda

Kao što smo već napomenuli, direktna Lyapunovljeva metoda ima glavnu ulogu u analizi stabilnosti dinamičkih sustava. Primjenom direktne metode definiramo koncepte (ne)stabilnosti, asimptotske stabilnosti i eksponecijalne stabilnosti pomoću poopćenog energetskog funkcijonala tzv. Lyapunovljeve funkcije. Za postavljanje uvjeta stabilnosti, nužno je uvesti pojmove pozitivne definitne i pozitivno semidefinitne funkcije. U slučaju općeg nelinearnog sustava,

ne postoji sistematičan pristup u konstrukciji Lyapunovljeve funkcije.

Skalarna funkcija više varijabli

$$V(\mathbf{x}) = V(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.12)$$

koja ima kontinuirane parcijalne derivacije, je *pozitivno definitna* u nekom području  $\Omega$ , ako u svim točkama tog područja ima pozitivni predznak i ako u ishodištu koordinatnog sustava, ima vrijednost nula, odnosno

$$V(\mathbf{x}) \begin{cases} > 0 & \text{ako } \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ = 0 & \text{ako } \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Funkcija  $V(\mathbf{x})$  je *pozitivno definitna*, u nekom području  $\mathcal{D}$ , ako u svim točkama tog područja zadržava pozitivan predznak i ima vrijednost nula, osim u ishodištu koordinatnog sustava, i u nekim drugim točkama tog područja, odnosno

$$V(\mathbf{x}) \begin{cases} \geq 0 & \text{ako } \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ = 0 & \text{ako } \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2.14)$$

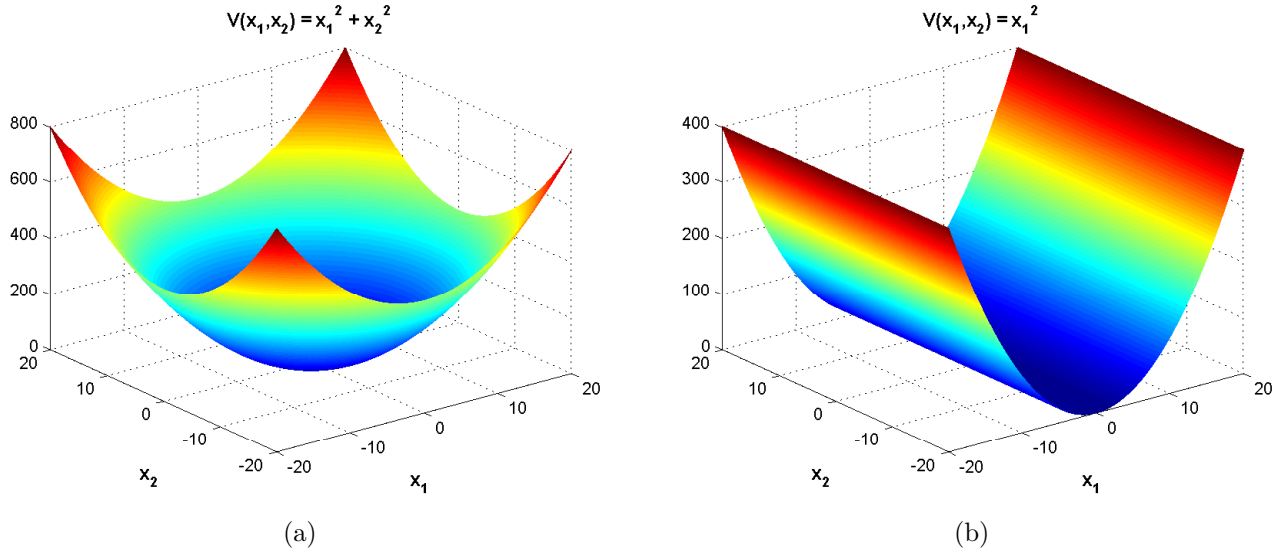
Funkcija  $V(\mathbf{x})$  je *negativno definitna* ako je  $-V(\mathbf{x})$  pozitivno definitna. Funkcija  $V(\mathbf{x})$  je *pozitivno semidefinitna* ako je  $V(\mathbf{0}) = 0$  i  $V(\mathbf{x}) \geq 0$  za  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Funkcija  $V(\mathbf{x})$  je *negativno semidefinitna* ako je  $-V(\mathbf{x})$  pozitivno semidefinitna.

Kako  $\mathbf{x}$  označava stanje sustava opisanog jednadžbom (2.15), skalarna funkcija  $V(\mathbf{x})$  predstavlja implicitnu funkciju vremena  $t$ .

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.15)$$

gdje je  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  nelinearna kontinuirana vektorska funkcija. Ako pretpostavimo da je  $V(\mathbf{x})$  diferencijabilna, tada možemo odrediti njezinu vremensku derivaciju

$$V(\mathbf{x}) = \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}), \quad (2.16)$$



Slika 2.1: Pozitivno definitna funkcija (a) i pozitivno semidefinitna funkcija (b)

gdje je parcijalna derivacija skalarne funkcije vektor-redak

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right], \quad (2.17)$$

dok je  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  vektor-stupac

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad f_n(\mathbf{x})]^T. \quad (2.18)$$

S obzirom da  $\mathbf{x}$  zadovoljava autonomni sustav (2.15),  $\dot{V}(\mathbf{x})$  ovisi jedino o  $\mathbf{x}$ . Zbog toga se često kaže da je  $\dot{V}(\mathbf{x})$  derivacija uzduž trajektorije sustava.

**Definicija 2.8 (Lyapunovljeva funkcija).** *Ako je unutar nekog područja  $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$  funkcija  $V(\mathbf{x})$  pozitivno definitna i ima kontinuirane parcijalne derivacije, te je njezina parcijalna derivacija  $\dot{V}(\mathbf{x})$  negativno semidefinitna,*

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (2.19)$$

*tada je  $V(\mathbf{x})$  Lyapunovljeva funkcija.*

Postavimo sada slijedeći teorem prema [10]

**Teorem 2.1. (Lyapunovljeva direktna metoda)** *Razmotrimo ponovno nelinearni sustav (2.15) i pretpostavimo da postoji kontinuirano diferencijabilna funkcija  $V(\mathbf{x}) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  takva da vrijedi*

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad (2.20)$$

$$V(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (2.21)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \triangleq V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}. \quad (2.22)$$

*Tada je rješenje sustava (2.15)  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$  stabilno u smislu Lyapunova. Ako je*

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \triangleq V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0, \quad (2.23)$$

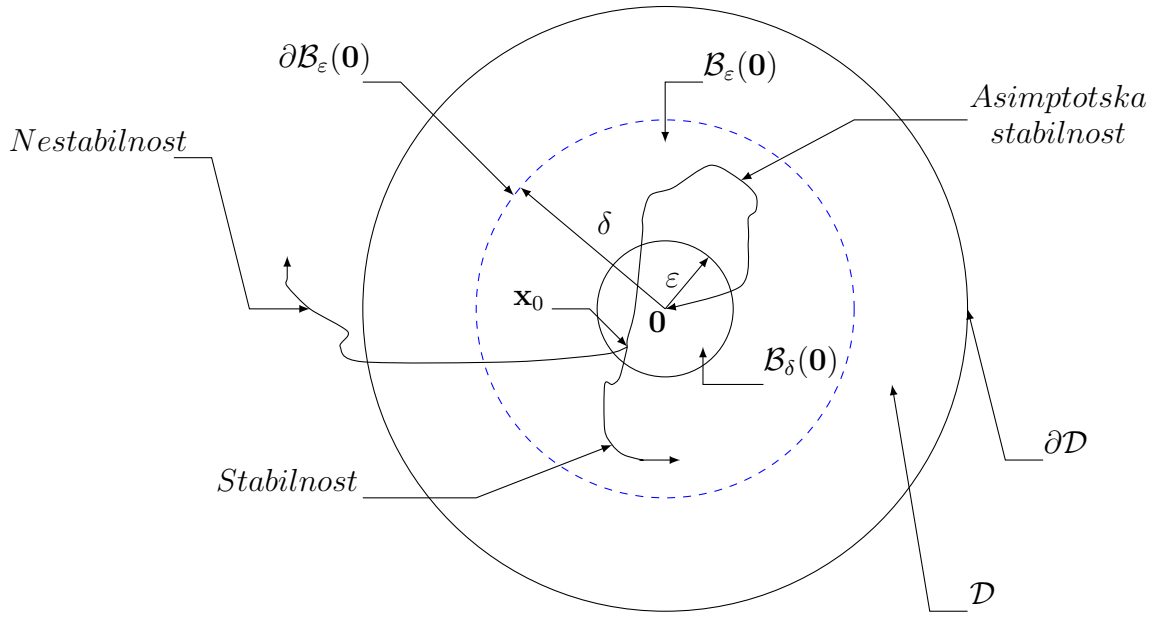
*tada je rješenje sustava (2.15)  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$  asimptotski stabilno u smislu Lyapunova. Konačno, ako postoje skalari  $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$ , i  $p \geq 1$ , takvi da  $V(\mathbf{x}) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  zadovoljava*

$$\alpha \|\mathbf{x}(t)\|^p \leq V(\mathbf{x}) \leq \beta \|\mathbf{x}(t)\|^p, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \quad (2.24)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\varepsilon V(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \quad (2.25)$$

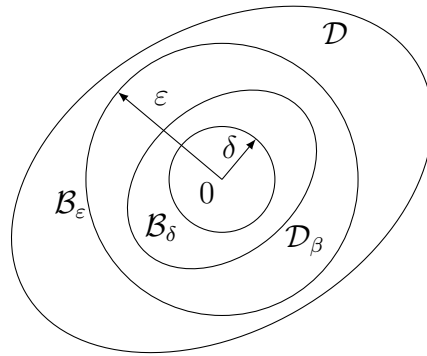
*tada je rješenje sustava (2.15)  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$  eksponencijalno stabilno u smislu Lyapunova.*

*Dokaz.* Neka je  $\varepsilon > 0$  tako da je  $\mathcal{B}_\varepsilon \subseteq \mathcal{D}$ . Kako je  $\partial\mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{0})$  kompaktan skup na osnovu [6, Propozicija 2.14], iz [6, Teorem 2.13] slijedi da  $\alpha \triangleq \min_{\mathbf{x} \in \partial\mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{0})} V(\mathbf{x})$  postoji. Primjetimo da je  $\alpha > 0$  s obzirom da  $\mathbf{0} \notin \partial\mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{0})$  i  $V(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Neka je  $\beta \in (0, \alpha)$  i  $\mathcal{D}_\beta$  homeomorfna komponenta skupa  $\{\mathbf{x} \in \mathcal{D} : V(\mathbf{x}) \leq \beta\}$  koja sadrži ishodište. Skup  $\mathcal{D}_\beta$  je skup svih  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  takvih da postoji kontinuirana vektorska funkcija  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$  takva da je  $\psi(0) = \mathbf{x}, \psi(1) = \mathbf{0}$  i  $V(\psi(\mu)) \leq \beta$ , za sve  $\mu \in [0, 1]$ . Primjetimo da je  $\mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{0})$ . Kako bismo to pokazali, pretpostavit ćemo suprotno (lat. *ad absurdum*), tj. da  $\mathcal{D}_\beta \not\subset \mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{0})$ . U tom slučaju postoji točka  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}_\beta$  takva da je  $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{0})$ , stoga vrijedi  $V(\mathbf{p}) \geq \alpha > \beta$ , što je kontradiktorno. S obzirom da  $\dot{V}(\mathbf{x}) \triangleq V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{x} \in \mathcal{D}_\beta$ , slijedi da je  $V(\mathbf{x}(t))$  nerastuća funkcija u vremenu, stoga slijedi  $V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(0)) \leq \beta, t \geq 0$ . Stoga,  $\mathcal{D}_\beta$  je



Slika 2.2: Stabilnost, asimptotska stabilnost, nestabilno ravnotežno stanje

pozitivno invarijantan skup s obzirom na (2.15). Štoviše, kako je  $\mathcal{D}_\beta$  kompaktan skup, slijedi iz [6, Korolar 2.5] za svaki  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{D}_\beta$ , jednačba (2.15) ima jedinstveno rješenje za svaki,  $t \geq 0$ .



Slika 2.3: Vizualni prikaz skupova korištenih u dokazu Teorema 2.1

Sljedeće, kako je  $V(\cdot)$  kontinuirana funkcija, i  $V(\mathbf{0}) = 0$ , postoji  $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ , takav da je  $V(\mathbf{x}) < \beta$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_\delta(\mathbf{0})$ . Neka je  $\mathbf{x}(t), t \geq 0$  rješenje sustava (2.15) sa ocjenom  $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$ .

S obzirom da je,  $\mathcal{B}_\delta(\mathbf{0}) \subset \mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{0}) \subseteq \mathcal{D}$  i  $V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{x} \in \mathcal{D}$  slijedi da je

$$V(\mathbf{x}(t)) - V(\mathbf{x}(0)) = \int_0^t V'(\mathbf{x}(s))\mathbf{f}(\mathbf{x}(s)) ds, \quad t \geq 0. \quad (2.26)$$

S obzirom da je  $V(\mathbf{x}) \geq \alpha, \mathbf{x} \in \partial\mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{0}), \text{ i } \beta \in (0, \alpha)$ , slijedi da  $\mathbf{x}(t) \notin \partial\mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{0}), t \geq 0$ . Stoga, za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  takav, da ako vrijedi  $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$ , onda vrijedi  $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, t \geq 0$ , što dokazuje za rješenje  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$  sustava (2.15) stabilnost u smislu Lyapunova.

Za dokaz asimptotske stabilnosti rješenja  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$  sustava (2.15), pretpostavimo  $V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0, \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , i  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{B}_\delta(\mathbf{0})$ . Slijedi da je  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{0}), t \geq 0$ . Međutim  $V(\mathbf{x}(t)), t \geq 0$ , je padajuća funkcija ograničena odozdo u nuli. Pretpostavimo sada suprotno (lat. *ad absurdum*), da  $\mathbf{x}(t), t \geq 0$  ne konvergira u nulu. To implicira da je  $V(\mathbf{x}(t)), t \geq 0$  donje ograničena, tj. postoji  $L > 0$  takav da je  $V(\mathbf{x}(t)) \geq L > 0, t \geq 0$ . Kako je  $V(\cdot)$  kontinuirana funkcija postoji  $\delta' > 0$  takav da je  $V(\mathbf{x}) < L$  za  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{\delta'}(\mathbf{0})$ , što dalje implicira da  $\mathbf{x}(t) \notin \mathcal{B}_{\delta'}(\mathbf{0})$  za sve  $t \geq 0$ . Sljedeće, definiramo  $L_1 \triangleq \min_{\delta' \leq \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon} -V(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . (2.23) implicira da je  $-V(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq L_1, \delta' \leq \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon$ , ili ekvivalentno

$$V(\mathbf{x}(t)) - V(\mathbf{x}(0)) = \int_0^t V'(\mathbf{x}(s))\mathbf{f}(\mathbf{x}(s)) ds \leq L_1 t, \quad (2.27)$$

slijedi, za sve  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{B}_\delta(\mathbf{0})$ ,

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(0)) - L_1 t. \quad (2.28)$$

Uz  $t > \frac{V(\mathbf{x}(0)) - L}{L_1}$ , slijedi da je  $V(\mathbf{x}(t)) \leq L$ , što je kontradikcija. Slijedi da  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  kako  $t \rightarrow \infty$ , te ustanovljujemo asimptotsku stabilnost u smislu Lyapunova.

Konačno, kako bismo dokazali eksponencijalnu stabilnost rješenja  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$  sustava (2.15), primjetimo da vrijedi (2.25), što implicira

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(0))e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0. \quad (2.29)$$

S obzirom na pretpostavku  $V(\mathbf{x}(0)) \leq \beta \|\mathbf{x}(0)\|^p$  i  $\alpha \|\mathbf{x}(t)\|^p \leq V(\mathbf{x}(t))$  slijedi

$$\alpha \|\mathbf{x}(t)\|^p \leq V(\mathbf{x}) \leq \beta \|\mathbf{x}(0)\|^p e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0, \quad (2.30)$$

što implicira

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\frac{\varepsilon}{p} t}, \quad t \geq 0, \quad (2.31)$$

te ustanovljujemo eksponencijalnu stabilnost u smislu Lyapunova.

Ako je  $\mathbf{x}_e \neq \mathbf{0}$  ravnotežno stanje sustava (2.15), Teorem 2.1 zadovoljava, i ako je  $V(\mathbf{x}_e) = 0$  i  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e$ . Kontinuirana diferencijabilna funkcija  $V(\cdot)$  koja zadovoljava (2.20) i (2.21) je *kandidat za Lyapunovljevu funkciju* nelinearnog dinamičkog sustava (2.15). Ako k tome zadovoljava i uvjet (2.22), tada je  $V(\cdot)$  *Lyapunovljeva funkcija* sustava (2.15). U smislu uvjeta (2.20)-(2.22),  $V(\cdot)$  se može smatrati poopćenom *funkcijom energije*. Ako sagledamo Lyapunovljevu funkciju, kao funkciju energije, u smislu energetske razine,  $V(\mathbf{x} = \alpha)$ , za dovoljno malu konstantu  $\alpha > 0$ , konstante energetske razine koje pokrivaju okoliš  $\mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{0})$ , gdje je  $V(\mathbf{x}_0) = \beta$  nelinearnog sustava (2.15), iz Teorema 2.1 slijedi da derivacija  $\dot{V}(\mathbf{x}) \triangleq V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$  mora biti negativna, kako bi trajektorije sustava (2.15) konvergirale u smjeru nižih energetske razine. Naravno, ako je zadovoljen uvjet (2.22), trajektorije sustava će se približavati ishodištu i ostanu u prostoru sfere radijusa  $\varepsilon > 0$  za svaki početni uvjet, svake energetske razine koja se nalazi u prostoru te sfere. Nadalje, ako je uvjet (2.23) zadovoljen, energetske razine sustava konvergiraju prema nuli, kako trajektorije sustava asimptotski konvergiraju prema nuli. ■

Nakon što smo u prethodnom potpoglavlju postavili osnovna načela stabilnosti nelinearnih dinamičkih sustava, postavlja se pitanje, hoće li postavljeni uvjeti garantirati stabilnost na čitavom  $\mathbb{R}^n$  prostoru? I koji su to uvjeti koji garantiraju *domenu atrakcije* na čitavom funkcijskom prostoru  $\mathbb{R}^n$ ?

Teorem 2.1 može dati *estimaciju domene atrakcije* za nelinearni dinamički sustav (2.15); što znači pronaći otvoreni sadržani skup  $\mathcal{D}_0$  u  $\mathbb{R}^n$  koji sadrži takvo ravnotežno stanje, sa svojstvom da svaka trajektorija unutar  $\mathcal{D}_0$  konvergira prema ravnotežnom stanju kako vrijeme



$t \rightarrow \infty$ . Važno je napomenuti da (2.21)-(2.23) ne daju dovoljne uvjete koji garantiraju da će svako rješenje koje počinje u  $\mathcal{D}$ , egzistirati u  $\mathcal{D}$  cijelo vrijeme. Međutim, ako (2.21) i (2.23) zadovoljavaju, tada je svaki *invarijantni skup* nelinearnog sustava (2.15) sadržan u  $\mathcal{D}$  ujedno sadržan i u domeni atrakcije  $\mathcal{D}_0$  sustava (2.15). Kao što smo pokazali u Teoremu 2.1, ako postoji Lyapunovljeva funkcija  $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  takva da su (2.20), (2.21) i (2.23) zadovoljeni, i ako je  $\mathcal{D}_\beta = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} : V(\mathbf{x}) \leq \beta\}$  ograničen, tada je  $\mathcal{D}_\beta$  pozitivno invarijantan skup s obzirom na (2.15), i svaka trajektorija sustava koja počinje u  $\mathcal{D}_\beta$  konvergira u ravnotežno stanje kako vrijeme  $t \rightarrow \infty$ . Stoga je  $\mathcal{D}_\beta$  estimacija domene atrakcije. Pravo pitanje je, koliko velik može biti  $\beta > 0$  tako da  $\mathcal{D}_\beta$  ostane ograničen? Kako je  $V(\cdot)$  kontinuirana i pozitivno definitna funkcija, uvijek postoji dovoljno mali  $\beta > 0$  takav da je energetska razina  $V(\mathbf{x} \equiv \beta)$  ograničena, pa je i  $\mathcal{D}_\beta$  ograničen, s obzirom da  $\mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{0})$  za neki  $\varepsilon > 0$ . Međutim, ovisno o strukturi  $V(\cdot)$ , kako  $\beta$  raste, energetska razina  $V(\mathbf{x}) = \beta$  može biti neograničena, stoga  $\mathcal{D}_\beta$  postaje neograničen. Za  $\mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{0})$ ,  $\beta$  mora zadovoljiti sljedeću nejednakost  $\beta < \inf_{\|\mathbf{x}\| \geq \varepsilon} V(\mathbf{x})$ . Stoga, ako je  $\beta < \gamma$ , gdje je

$$\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \inf_{\|\mathbf{x}\| \geq \varepsilon} V(\mathbf{x}) < \infty, \quad (2.32)$$

i  $\gamma > 0$ , onda je  $\mathcal{D}_\beta$  sigurno ograničen.

U sljedećem potpoglavlju ćemo precizno definirati domenu atrakcije rješenja  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  nelinearnog sustava (2.15) uz pomoć LaSalleovog principa invarijantnosti.

## 2.3 LaSalleov princip inavarijantnosti

Vidjeli smo da asimptotsku stabilnost možemo utvrditi samo u slučaju da je  $\dot{V}(\mathbf{x})$  striktno negativno definitna funkcija. Ako je  $\dot{V}(\mathbf{x})$  samo negativno semidefinitna, tada za dokaz asimptotske stabilnosti u smislu Lyapunova, moramo primjeniti LaSalleov princip invarijantnosti <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>J.P.LaSalle i N.N. Krasovskii nezavisno su došli do generalnog teorema, u radovima objavljenim 1960., odnosno 1959. godine. Specijalni slučaj objavljen je 1952. u suradnji sa E.A. Barbashianom.

**Definicija 2.9 (Radijalno neograničena funkcija).** *Pretpostavimo da je rješenje  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$  asimptotski stabilno. Tada je domena atrakcije  $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$  sustava (2.15)*

$$\mathcal{D}_0 \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{D} : \text{ako } \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0 \text{ tada } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \right\}. \quad (2.33)$$

Kao što smo već ustanovili, konstrukcija domene atrakcije nelinearnog dinamičkog sustava, slijedi iz činjenice da će trajektorije sustava koje počinju u podskupu  $\mathcal{D}$  prostora stanja ostati u podskupu  $\mathcal{D}$ , ako je derivacija Lyapunovljeve funkcije negativna u  $\mathcal{D}$ , tj. trajektorije sustava težiti će prema nižim energetske razine. Kako bismo estimirali podskup domene atrakcije nelinearnog dinamičkog sustava (2.15), pretpostavimo da postoji kontinuirana diferencijabilna funkcija  $V(\mathbf{x}) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  takva da su uvjeti (2.20), (2.21) i (2.23) zadovoljeni. Slijedeće, neka je  $\mathcal{D}_\beta$  spojena komponenta  $\{\mathbf{x} \in \mathcal{D} : V(\mathbf{x}) \leq \beta\}$  koja sadrži ishodište. Primjetimo, da će svaka trajektorija koja počinje u  $\mathcal{D}_\beta$  težiti prema nižim energetske razine, tj. ne može izaći iz  $\mathcal{D}_\beta$ . Stoga je  $\mathcal{D}_\beta$  estimirana domena atrakcije sustava (2.15).

Kako bismo učvrstili tu tvrdnju, povećat ćemo  $\beta$  tako da je  $\mathcal{D}_\beta \subseteq \mathcal{D}$ . Stoga, definiramo  $V_\Gamma \triangleq \sup \{\beta > 0 : \mathcal{D}_\beta \subseteq \mathcal{D}\}$  tako da je

$$\mathcal{D}_A \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} : V(\mathbf{x}) \leq V_\Gamma\}, \quad (2.34)$$

podskup domene atrakcije sustava (2.15), s obzirom da je  $V(\mathbf{x}) < 0$  za svaki

$$\mathbf{x} \in \mathcal{D}_A \setminus \{\mathbf{0}\} \subseteq \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (2.35)$$

Nakon što smo pokazali važnost konstrukcije domene atrakcije, važno je postaviti pitanje, pod kojim će uvjetima domena atrakcije biti čitav prostor stanja  $\mathbb{R}^n$ ? Naravno, to odgovara slučaju kada će se sve trajektorije  $s(t, \mathbf{x}_0)$  sustava (2.15) približavati ravnotežnom stanju kako  $t \rightarrow \infty$  za sve  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , tj. slučaj kada je dinamički sustav asimptotski stabilan. Iz Teorema 2.1 slijedi, da je sustav globalno asimptotski stabilan, ako  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  sadržan u kompaktnom skupu  $\mathcal{D}_\beta$  za neki  $\beta > 0$ . Ako govorimo o globalnoj asimptotskoj stabilnosti, onda je to slučaj kad je  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ , i ako je  $\forall \beta > 0$ ,  $\mathcal{D}_\beta$  ograničen, tj. ako za svaki  $\beta > 0$  postoji  $r > 0$ , takav da je  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_\beta$ , onda je  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_r(\mathbf{0})$ . Ekvivalentno, ako je  $V(\mathbf{x}) > \beta$  za svaki  $\mathbf{x} \notin \mathcal{B}_r(\mathbf{0})$ . Uvjet

da je  $\mathcal{D}_\beta$  radijalno ograničen za svaki  $\beta > 0$  podrazumijeva se ako

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \quad \text{kako} \quad \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty. \quad (2.36)$$

Za funkciju  $V(\cdot)$  koja zadovoljava (2.36), kažemo da je radijalno neograničena.

Nakon što smo definirali uvjete u kojima će Lyapunovljeva funkcija biti radijalno neograničena, navodimo Teorem 2.2 o globalnoj stabilnosti dinamičkog sustava u smislu Lyapunova.

**Teorem 2.2. (Globalna stabilnost u smislu Lyapunova)** *Razmotrimo nelinearni dinamički sustav (2.15), i pretpostavimo da postoji kontinuirana diferencijabilna funkcija  $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  takva da*

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad (2.37)$$

$$V(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (2.38)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \triangleq V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (2.39)$$

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \quad \text{kako} \quad \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty. \quad (2.40)$$

Tada je rješenje  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$  sustava (2.15) globalno asimptotski stabilno u smislu Lyapunova. Ako, alternativno, postoje skalari  $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$  i  $p \geq 0$ , takvi da  $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zadovoljava

$$\alpha\|\mathbf{x}\|^p \leq V(\mathbf{x}) \leq \beta\|\mathbf{x}\|^p, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.41)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \triangleq V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \beta V(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.42)$$

tada je rješenje  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$  sustava (2.15) globalno eksponencijalno stabilno u smislu Lyapunova.

*Dokaz.* Neka je  $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$  i neka je  $\beta \triangleq V(\mathbf{x}_0)$ . Uvjet (2.40) implicira da postoji  $\varepsilon > 0$  za svaki  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  takav da vrijedi ocjena  $\|\mathbf{x}\| > \varepsilon$ . Zatim, iz (2.39) slijedi da je  $V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}_0) = \beta, t \geq 0$ , što implicira da je  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{0}), t \geq 0$ . Ostatak dokaza provodimo na osnovu Teorema 2.1, te dokazujemo globalnu stabilnost u smislu Lyapunova. ■

Nakon što smo definirali uvjete koji garantiraju globalnu stabilnost u smislu Lyapunova, nelinearnog dinamičkog sustava, uvest ćemo tzv. Barbashin-Krasovskii-LaSalleov princip invarijantnosti ili kraće LaSalleov princip invarijantnosti. Na taj način "relaksiramo" striktan uvjet negativne definitnosti derivacije Lyapunovljeve funkcije uz zadržavanje asimptotske stabilnosti sustava. Naročito, ako možemo konstruirati takvu kontinuirano diferencijabilnu funkciju, definiranu na kompaktnom invarijantnom skupu s obzirom na sustav (2.15), da je njezina derivacija uzduž trajektorije sustava, negativno semidefinitna, te da je ravnotežno stanje asimptotski stabilno u smislu Lyapunova.

**Teorem 2.3. (Barbashin-Krasovskii-LaSalleov teorem)** *Razmotrimo nelinearni dinamički sustav (2.15), te pretpostavimo da je  $\mathcal{D}_c \subset \mathcal{D}$  kompaktan pozitivno invarijantan skup s obzirom na sustav (2.15), i pretpostavimo da postoji  $V(\mathbf{x}) : \mathcal{D}_c \rightarrow \mathbb{R}$  takva da je  $\dot{V}(\mathbf{x}) \triangleq V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_c$ . Neka je  $\mathcal{R} \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_c : V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0\}$  i neka je  $\mathcal{M}$  najveći invarijantni skup sadržan u  $\mathcal{R}$ . Ako  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{D}_c$ , tada  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathcal{M}$  kako  $t \rightarrow \infty$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t \geq 0$  rješenje sustava (2.15) i  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{D}_c$ . S obzirom da je  $\dot{V}(\mathbf{x}) \triangleq V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_c$ , slijedi

$$V(\mathbf{x}(t)) - V(\mathbf{x}(\tau)) = \int_{\tau}^t V'(\mathbf{x}(s))\mathbf{f}(\mathbf{x}(s)) ds \leq 0, \quad t \geq \tau, \quad (2.43)$$

stoga,  $V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(\tau))$ ,  $t \geq \tau$ , što implicira da je  $V(\mathbf{x}(t))$  nerastuća funkcija za svaki  $t$ . S obzirom da je  $V(\cdot)$  kontinuirana funkcija na kompaktnom skupu  $\mathcal{D}_c$ , postoji  $\beta \in \mathbb{R}$  takav da je  $V(\mathbf{x}) \geq \beta$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_c$ . Odavde slijedi da,  $\gamma_{\mathbf{x}_0} \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}(t))$  postoji. Zatim, za svaki  $\mathbf{p} \in \mathcal{I}(\mathbf{x}_0)$ , postoji rastući neograničeni niz  $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $t_0 = 0$ , takav da  $\mathbf{x}(t_n) \rightarrow \mathbf{p}$  kako  $n \rightarrow \infty$ . S obzirom da je  $V(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_c$  kontinuirana,  $V(\mathbf{p}) = V(\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}(t_n)) = \gamma_{\mathbf{x}_0}$ , slijedi da je  $V(\mathbf{x}) = \gamma_{\mathbf{x}_0}$  na  $\mathcal{I}(\mathbf{x}_0)$ . Kako je  $\mathcal{D}_c$  kompaktan i pozitivno invarijantan skup, slijedi da je  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t \geq 0$  ograničen, te iz [6, Teorem 2.41] slijedi da je  $\mathcal{I}(\mathbf{x}_0)$  neprazan, kompaktan invarijantan skup. Odavde slijedi, da je  $\dot{V}(\mathbf{x}) \triangleq V'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$  na  $\mathcal{I}(\mathbf{x}_0)$  i da je  $\mathcal{I}(\mathbf{x}_0) \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{D}_c$ . Konačno,  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathcal{I}(\mathbf{x}_0)$  kako  $t \rightarrow \infty$ , slijedi da,  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathcal{M}$  kako  $t \rightarrow \infty$ . ■

Konstrukcija Lyapunovljeve funkcije  $V(\cdot)$  po Teoremu 2.3, garantira postojanje kompaktnog i pozitivno invarijantnog skupa  $\mathcal{D}_c$ . Naročito, ako je  $\mathcal{D}_\beta = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} : V(\mathbf{x}) \leq \beta\}$ , gdje je  $\beta > 0$ , ograničen, i  $V(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , tada uvijek možemo uzeti da je  $\mathcal{D}_c = \mathcal{D}_\beta$ . Kao što smo već definirali u prethodnom potpoglavlju, ako je  $V(\cdot)$  pozitivno definitna funkcija, tada je  $\mathcal{D}_\beta$  ograničen skup, za dovoljno mali  $\beta > 0$ . Alternativno, ako je  $V(\cdot)$  radijalno neograničena,  $\mathcal{D}_\beta$  je ograničen za svaki  $\beta > 0$ , neovisno je li  $V(\cdot)$  pozitivno definitna, ili ne.

## Disipativnost i pasivnost nelinearnih dinamičkih sustava

U ovom poglavlju uvest ćemo pojam disipativnosti i pasivnosti nelinearnih dinamičkih sustava. Ako energija sustava opada u vremenu, to znači da ju sustav predaje okolini u obliku disipacije (gubitak energije). Izolirani mehanički sustav kojem energija opada u vremenu, znači da energija disipira zbog viskoznog ili suhog trenja, te u obliku toplinske energije predaje okolišu izvan promatranog sustava. Možemo reći da disipativne sustave karakterizira svojstvo da u svakom vremenskom trenutku, količina energije koju sustav predaje okolišu, ne može prijeći količinu energije koju je sustav primio iz okoliša. Disipativne strukture<sup>1</sup> karakterizira spontano pojavljivanje razbijanja simetrije, anizotropije (engl. *anisotropy*), te formiranje kompleksnih, ponekad kaotičnih struktura gdje interakcija između čestica rezultira nepredvidljivošću u ponašanju sustava. Svakodnevni primjeri takvog ponašanja su ciklone, uragani, živi organizmi, turbulentno strujanje, konvekcija itd. Isto tako, teorija disipativnih sustava može se primjeniti u ekonomskim, biološkim, te drugim kompleksnim sustavima. Sa stajališta teorije upravljanja, razmatramo nejednakost između dobavljene energije (engl. *supply rate*), i poopćene funkcije energije sustava (engl. *storage function*). U ovom poglavlju ćemo promatrati *otvoreni dinamički sustav*, u kojem je interakcija između sustava i okoliša, eksplicitno uzeta u obzir kroz ulazne i izlazne varijable sustava. Poglavitno, okoliš utječe na dinamički sustav preko ulaznih varijabli sustava.

---

<sup>1</sup>Izraz, disipativne strukture, prvi je puta definirao rusko-belgijski kemičar Ilya Prigogine, dobitnik Nobelove nagrade za kemiju 1977. godine., za svoj pionirski rad, na disipativnim strukturama.

### 3.1 Disipativnost nelinearnih dinamičkih sustava

Prije nego što definiramo osnovne karakteristike tj. definicije disipativnih dinamičkih sustava, razmotrit ćemo primjer osnovnog linearnog mehaničkog sustava.

**Primjer 3.1 (Prigušeni mehanički oscilator).** [9] *Razmotrimo jednodimenzionalni linearni prigušeni mehanički oscilator, opisan diferencijalnom jednadžbom*

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t), \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0, \quad (3.1)$$

gdje je  $x(t)$  pozicija,  $M$  je masa,  $D$  je konstanta viskoznog trenja,  $K$  je konstant opruge, a  $F(t)$  je vanjska sila koja djeluje na sustav.

*Energija sustava je*

$$V(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}Dx^2(t). \quad (3.2)$$

*Vremenska derivacija funkcije energije je*

$$\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) = M\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + Dx(t)\dot{x}(t). \quad (3.3)$$

*Uvrštavanjem diferencijalne jednadžbe (3.1) u prethodni izraz, dobivamo*

$$\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) = F(t)\dot{x}(t) - D\dot{x}^2(t). \quad (3.4)$$

*Integriranje prethodne jednadžbe od  $t = t_0$  do  $t = t_1$  dobivamo*

$$V(x(t_1), \dot{x}(t_1)) = V(x(t_0), \dot{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} F(t)\dot{x}(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} D\dot{x}^2(t) dt. \quad (3.5)$$

*Prethodni izraz možemo interpretirati na sljedeći način. Energija sustava u trenutku  $t = t_1$  jednaka je energiji sustava u početnom trenutku, plus energija primljena djelovanjem vanjske sile  $F(t)$ , minus disipirana energija uslijed viskoznog trenja. Ako nema vanjske sile i viskoznog trenja, sustav je prepušten samom sebi, tj. energija je konstantna (konzervativni sustav).  $S$*

obzirom da je  $D > 0$ , izraz (3.5) možemo prikazati u obliku sljedeće nejednakosti

$$V(x(t), \dot{x}(t)) + \int_{t_0}^{t_1} F(t) \dot{x}(t) dt \geq V(x(t_1), \dot{x}(t_1)), \quad (3.6)$$

koja kaže, da je energija sustava u nekom trenutku manja ili jednaka početnoj energiji sustava, plus energiji primljenoj iz okoline (razlika je disipirana u okolinu). Ako na dinamički sustav (3.1) gledamo kao na preslikavanje ulazne varijable  $u(t) = F(t)$  na izlaznu varijablu  $y(t) = \dot{x}(t)$ , te uvedemo funkciju

$$s(u(t), y(t)) = u(t)y(t) = F(t)\dot{x}(t), \quad (3.7)$$

koja predstavlja snagu sustava, tada izraz (3.6) možemo prikazati na sljedeći način

$$V(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t)) dt \geq V(\mathbf{x}(t_1)), \quad (3.8)$$

gdje je  $\mathbf{x} = [x \ \dot{x}]^T$  vektor stanja sustava. Izraz (3.8) naziva se disipacijska nejednakost (engl. *dissipation inequality*) i može se poopćiti za sve realne fizikalne sustave.

Sada ćemo uvesti opću definiciju disipativnih sustava.

**Definicija 3.1 (Disipativni sustavi).** Razmotrimo nelinearni dinamički sustav opisan diferencijalnim jednadžbama

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0 \quad (3.9)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (3.10)$$

gdje je  $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  vektor stanja,  $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$  vektor ulaza, a  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$ . Ako postoji funkcija koja preslikava ulazno-izlazni par  $(\mathbf{u}, \mathbf{y})$  u skalarnu veličinu

$$s : \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.11)$$



tu veličinu nazivamo *supply rate* (snaga, tok snage).

**Definicija 3.2 (Disipativnost).** Sustav (3.9)-(3.10) je *disipativan* u odnosu na *supply rate*  $s(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ , ako postoji funkcija  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  koju nazivamo *storage function* (energija akumulirana u sustavu), takva za  $\forall \mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{X}, \forall t_1 \geq t_0$  i  $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}$ , vrijedi

$$V(\mathbf{x}(t_1)) \leq V(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) dt. \quad (3.12)$$

Nejednakost (3.12) nazivamo *integralna disipacijska nejednakost*, koja izražava činjenicu da je akumulirana energija  $V(\mathbf{x}(t_1))$ , sustava (3.9)-(3.10), u bilo kojem vremenskom trenutku jednaka sumi akumulirane energije  $V(\mathbf{x}(t_0))$  u početnom trenutku i ukupne eksterno primljene energije  $\int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) dt$  tijekom vremenskog intervala  $[t_0, t_1]$ , te dolazimo do zaključka da nije moguće stvoriti energiju unutar sustava, već samo disipirati energiju.

**Definicija 3.3 (Diferencijalna disipacijska nejednakost).** Na osnovu prethodno izvedene integralne disipacijske nejednakosti (3.12), možemo dobiti tzv. *diferencijalnu disipacijsku nejednakost* (u limesu  $t_0 \rightarrow t_1$ )

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \leq s(\mathbf{u}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{u}. \quad (3.13)$$

Prethodni izraz interpretiramo na slijedeći način: prirast energije sustava, ne može biti veći od ulazne snage. Izraz (3.13) možemo prikazati kao

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq s(\mathbf{u}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{u}, \quad (3.14)$$

gdje je

$$V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Diferencijalna disipacijska nejednakost prema izrazu (3.13), tj. (3.15) korisiti se pri uspostavljanju analogije između koncepta disipativnosti i Lyapunovljeve analize stabilnosti.

## 3.2 Pasivnost nelinearnih dinamičkih sustava

Disipativne dinamičke sustave možemo klasificirati prema obliku funkcije snage (*engl. supply rate*)  $s(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ . Jedan od najvažnijih izbora navedene funkcije je

$$s(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) = \mathbf{u}^T(t) \mathbf{y}(t) \quad (3.16)$$

Pretpostavimo da je sustav (3.9)-(3.10) disipativan s obzirom na (3.16). Tada vrijedi slijedeća nejednakost

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{y}(t) dt \geq V(\mathbf{x}(t_1)) - V(\mathbf{x}(t_0)) \geq -V(\mathbf{x}(t_0)), \quad (3.17)$$

za  $\forall \mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{X}$ ,  $\forall t_1 \geq t_0$ , i  $\forall \mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$ .

**Definicija 3.4 (Skalarni produkt funkcija).** *Neka su  $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}_{2e}^m$  (prošireni Lebesgueov prostor)<sup>2</sup> i  $T > 0$ . Skalarni produkt vektorskih funkcija  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{y}$  definiran je za svaki  $T > 0$  slijedećim izrazom*

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{y} \rangle_T = \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{y}(t) dt. \quad (3.18)$$

Ako stavimo  $t_0 = 0$  i  $t_1 = T$ , te  $\beta = -V(\mathbf{x}(t_0))$ , izraz (3.17) postaje  $\langle \mathbf{y} | \mathbf{u} \rangle_T \geq \beta$ .

Na osnovu prethodno navedenog definiramo slijedeću abstrakciju pasivnosti.

**Definicija 3.5 (Pasivni sustavi).** *Za sustav (3.9)-(3.10) kažemo da je pasivan, ako postoji konstanta  $\beta \in \mathbb{R}$ , takva da vrijedi*

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{y} \rangle_T \geq \beta. \quad (3.19)$$

*Konstanta  $\beta$  ovisi o početnim uvjetima sustava. Koncept pasivnosti je važan za većinu realnih fizikalnih sustava, zbog toga što većina sustava ima funkciju snage (*engl. supply rate*) u obliku*

---

<sup>2</sup>Lebesgueov prostor [1] definira prostor takvih funkcija čija je  $p$ -ta norma Lebesgue integrabilna, tj. norma funkcije je  $\|\mathbf{f}(t)\|_{\mathcal{L}_p} = (\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|^p dt)^{\frac{1}{p}} < \infty$ ,  $p \geq 1$ .

skalarnog produkta međusobno konjugiranih ulazno-izlaznih varijabli (npr. sila  $F(t)$  i brzina  $\dot{x}(t)$ ).

### Diferencijalni oblik pasivnosti

Integralni oblik definicije pasivnosti (3.19) poprima diferencijalni oblik  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}^T(t)\mathbf{y}(t)$ . Navodimo slijedeće definicije pasivnosti u diferencijalnom obliku.

**Definicija 3.6 (Pasivnost).** *Ako postoji pozitivno semidefinitna funkcija  $V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$  i ako vrijedi*

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{u}^T(t)\mathbf{y}(t), \quad (3.20)$$

*za svaki  $t \geq 0$  i za sve funkcije  $\mathbf{u}(t)$  tada kažemo da je sustav pasivan. Ako vrijedi jednakost  $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{u}^T(t)\mathbf{y}(t)$  sustav je bez gubitaka (engl. lossless).*

**Definicija 3.7 (Ulazna striktna pasivnost).** *Ako postoji funkcija  $V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$  i parametar  $\delta > 0$ , te ako vrijedi*

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t) - \delta \mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t), \quad (3.21)$$

*za svaki  $t \geq 0$  i za sve funkcije  $\mathbf{u}(t)$ , tada kažemo da je sustav ulazno striktno pasivan (engl. input strictly passive).*

**Definicija 3.8 (Izlazna striktna pasivnost).** *Ako postoji funkcija  $V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$  i parametar  $\varepsilon > 0$ , te ako vrijedi*

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t) - \varepsilon \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t), \quad (3.22)$$

*za svaki  $t \geq 0$  i za sve funkcije  $\mathbf{u}(t)$ , tada kažemo da je sustav izlazno striktno pasivan (engl. output strictly passive).*

**Definicija 3.9 (Striktna pasivnost).** *Ako postoji funkcija  $V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$  i parametar  $\rho > 0$ ,*

te pozitivno definitna funkcija  $\psi(\mathbf{x}(t))$ , koji zadovoljavaju

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t) - \rho\psi(\mathbf{x}(t)) \quad (3.23)$$

za svaki  $t \geq 0$  i za sve funkcije  $\mathbf{u}(t)$ , tada kažemo da je sustav striktno pasivan (engl. *strictly passive*).

Ako ponovno pogledamo primjer prigušenog mehaničkog oscilatora, možemo primjetiti da je sustav izlazno striktno pasivan. To vidimo na osnovnu derivacije funkcije energije  $\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) = F(t)\dot{x}(t) - D\dot{x}^2(t)$ . Konjugirane varijable su  $u(t) = F(t)$  i  $y(t) = \dot{x}(t)$ , te ako stavimo da je  $\varepsilon = D$ , dobivamo  $\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) = u(t)y(t) - \varepsilon y^2(t)$  iz čega slijedi da je sustav izlazno striktno pasivan. Ako je  $D = 0$ , tj. ako nema viskoznog trenja, sustav je konzervativan i sva predana energija se akumulira u sustavu.

### $\mathcal{L}_2$ -gain supply rate

Pored prethodno navedenih definicija pasivnosti i  $s(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ , bitan je također tzv.  $\mathcal{L}_2$ -gain supply rate,

$$s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \gamma^2 \mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t) - \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t), \quad (3.24)$$

pomoću kojega uspostavljamo vezu između činjenica da je sustav izlazno striktno pasivan i da ima konačno  $\mathcal{L}_2$  pojačanje [13].

**Lema 3.1.** (Disipativnost u odnosu na  $\mathcal{L}_2$ -gain supply rate funkciju) *Ako je sustav disipativan u odnosu na  $\mathcal{L}_2$ -gain supply rate, tada je sustav  $\mathcal{L}_2$  stabilan i ima konačno  $\mathcal{L}_2$  pojačanje koje je manje ili jednako  $\gamma$ .*

*Dokaz.* Po definiciji disipativnosti (3.12) slijedi

$$V(\mathbf{x}(t_1)) \leq V(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} [\gamma^2 \mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t) - \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)] dt, \quad (3.25)$$

odnosno

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) dt \leq \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt + V(\mathbf{x}(t_0)) - V(\mathbf{x}(t_1)). \quad (3.26)$$

S obzirom da vrijedi  $V(\mathbf{x}(t_1)) \geq 0$ , slijedi

$$\left( \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma \left( \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{V(\mathbf{x}(t_0))}, \quad (3.27)$$

gdje smo iskoristili nejednakost  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$  za nenegativne  $a$  i  $b$ .

Ako stavimo  $t_0 = 0$  i  $T = 0$ , dobiveni izraz postaje

$$\|\mathbf{y}_T\|_{\mathcal{L}_2} \leq \gamma \|\mathbf{u}_T\|_{\mathcal{L}_2} + \beta, \quad (3.28)$$

gdje je  $\beta = \sqrt{V(\mathbf{x}(t_0))}$ . ■

**Lema 3.2.** (Izlazno striktna pasivnotst u odnosu na  $\mathcal{L}_2$ -gain supply rate funckiju)

*Ako je sustav izlazno striktno pasivan sa  $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{y}^T(t) \mathbf{u}(t) - \varepsilon \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t)$ , tada je sustav  $\mathcal{L}_2$  stabilan i ima konačno  $\mathcal{L}_2$  pojačanje koje je manje ili jednako  $\frac{1}{\varepsilon}$ .*

*Dokaz.* Derivacija funckije energije zadovoljava

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t)) &\leq \mathbf{u}^T(t) \mathbf{y}(t) - \varepsilon \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) = \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{u}^T(t) - \varepsilon \mathbf{y}(t))^T (\mathbf{u}^T(t) - \varepsilon \mathbf{y}(t)) + \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) - \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) \leq \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) - \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Integriranjem prethodnog izraza dobivamo

$$\int_0^T \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) dt \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt - \frac{2}{\varepsilon} [V(\mathbf{x}(T)) - V(\mathbf{x}(0))], \quad (3.30)$$

s obzirom da vrijedi  $V(\mathbf{x}(T)) \geq 0$ , slijedi

$$\left( \int_0^T \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\varepsilon} \left( \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} V(\mathbf{x}(0))}. \quad (3.31)$$

Na osnovu prethodnog izraza slijedi

$$\|\mathbf{y}_T\|_{\mathcal{L}_2} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{u}_T\|_{\mathcal{L}_2} + \zeta, \quad (3.32)$$

gdje smo iskoristili nejednakost  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$  za nenegativne  $a$  i  $b$ , i gdje je  $\zeta = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} V(\mathbf{x}(0))}$ . ■

Utvdili smo da je prigušeni mehanički oscilator izlazno stiktno pasivan, na osnovu prethodne leme, možemo ustvrditi da je i  $\mathcal{L}_2$  stabilan sa pojačanjem  $\frac{1}{D}$ . Ako sustav ima veliku vrijednost viskoznog prigušenja to znači da ima malo  $\mathcal{L}_2$ -pojačanje, što rezultira velikim prigušenjem vanjskih poremećaja, međutim isto tako sustav će pri tome imati spor odziv. Dolazimo do zaključka, da imamo varijabilnost između robusnosti i performansi prijelaznog odziva.

### 3.3 Hill-Moylandovi uvjeti nelinearnih afinih sustava

Na osnovu definicija pasivnosti iz prethodnog potpoglavlja, odredit ćemo uvjete pod kojima je neki sustav pasivan (karakterizacija pasivnosti)<sup>3</sup>. Konkretno, razmotrit ćemo klasu *nelinearnih afinih sustava* s obzirom na upravljački vektor  $\mathbf{u}(t)$  (ulazno-izlazni affine sustav),

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (3.34)$$

gdje je  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$  i  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ .

---

<sup>3</sup>Uvjete pasivnosti za linearne sustave transformirane u prostor stanja, prvi puta su postavili R. E. Kalman V. A. Yakubovich i V. M. Popov 1962. godine, a kasnije su 1976. godine, D. J. Hill i P. Moylan proširili na klasu nelinearnih sustava, pa se takvi uvjeti često nazivaju Hill-Moylandovim uvjetima

**Definicija 3.10.** (Karakterizacija pasivnosti nelinearnih afinih sustava) Sustav (3.33)-(3.34) ima Hill-Moylandove uvjete, ako postoji  $C^1$  nenegativna funkcija  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V(\mathbf{0}) = 0$ , takva da za svaki,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vrijedi,

$$L_f V(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (3.35)$$

$$L_g V(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) \quad (3.36)$$

Primjetimo da je (3.36) ekvivalentan  $(L_g V)^T(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ .

Sada ćemo pokazati da je nelinearni affine sustav pasivan za supply rate funkciju  $s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{u}$  i nenegativnu storage funkciju  $V$ , ako i samo ako, uz  $V$ , zadovoljava Hill-Moylandove uvjete.

**Teorem 3.1.** (Hill-Moylandovi uvjeti) Ako nelinearni affine sustav (3.33)-(3.34) zadovoljava Hill-Moylandove uvjete za funkciju  $V$ , tada je sustav pasivan. Obrnuto, ako je sustav pasivan za nenegativnu storage funkciju  $V$  klase  $C^1$ , tada zadovoljava Hill-Moylandove uvjete (3.35)-(3.36).

*Dokaz.* Ako sustav (3.33)-(3.34) zadovoljava Hill-Moylandove uvjete (3.35)-(3.36) za storage funkciju  $V$ , tada, za svako rješenje  $\mathbf{x}(t)$ , vrijedi

$$\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = L_f V(\mathbf{x}) + L_g V(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}^T(t) \mathbf{u}(t). \quad (3.37)$$

Ako stavimo  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  i integriramo na intervalu  $[0, T]$ , slijedi,

$$V(\mathbf{x}(T)) - V(\mathbf{x}_0) \leq \int_0^T \mathbf{y}^T(t) \mathbf{u}(t) dt \quad (3.38)$$

što je ekvivalentno disipacijskoj nejednakosti postavljenoj u prethodnim potpoglavljima.

Obrnuto, pretpostavimo da je sustav (3.33)-(3.34) pasivan za  $C^1$  klasu nenegativne storage funkcije  $V$  i supply rate funkcije  $s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{u}$ . Definiranjem disipacijske nejednakosti slijedi

$$\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}] = L_f V(\mathbf{x}) + L_g V(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}^T(t) \mathbf{u}(t) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \quad (3.39)$$

za svaki proizvoljni  $\mathbf{u}(t)$  i svako rješenje  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Ako postavimo vektor upravljanja takav da je  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , direktno slijedi

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = L_f V(\mathbf{x}) \leq 0. \quad (3.40)$$

Zapišimo izraz (3.39) u slijedećem obliku

$$[L_g V(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^T(\mathbf{x})] \mathbf{u} \leq -L_f V(\mathbf{x}), \quad (3.41)$$

za bilo koji  $\mathbf{u}(t)$  i  $\mathbf{x}(t)$ .

Pretpostavimo da (3.36) ne vrijedi za neki  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ; tada, izabiremo neki proizvoljni  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ , takav da je lijeva strana izraza (3.41) veća od  $-L_f V(\mathbf{x}_0)$ , tj.

$$[L_g V(\mathbf{x}_0) - \mathbf{h}^T(\mathbf{x}_0)] \mathbf{u}_0 > -L_f V(\mathbf{x}_0). \quad (3.42)$$

Kada izraz (3.42) raspišemo, dobivamo

$$L_g V(\mathbf{x}_0) \mathbf{u}_0 - \mathbf{h}^T(\mathbf{x}_0) \mathbf{u}_0 > -L_f V(\mathbf{x}_0), \quad (3.43)$$

te uvrstimo prethodno postavljenu pretpostavku  $L_g V(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x})$ . Dobivamo da je

$$-L_f V(\mathbf{x}_0) < 0, \quad (3.44)$$

što je kontradikcija, te je time dokaz završen. ■

Nakon što smo definirali uvjete pasivnosti za klasu nelinearnih afinih sustava, sada ćemo definirati uvjete izlazne striktno pasivnosti za klasu nelinearnih afinih sustava.

**Lema 3.3. (Karakterizacija izlazne striktno pasivnosti)** *Da bi sustav (3.33)-(3.34) bio izlazno striktno pasivan za  $C^1$  klasu nenegativne storage funkcije  $V$  i supply rate funkcije*



$s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{u} - \varepsilon \mathbf{y}^T \mathbf{y}$ ,  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}^T \mathbf{u} - \varepsilon \mathbf{y}^T \mathbf{y}$ , mora biti zadovoljen sljedeći uvjet

$$\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}] = L_f V(\mathbf{x}) + L_g V(\mathbf{x}) \leq \mathbf{h}^T \mathbf{u} - \varepsilon \mathbf{h}^T \mathbf{h} \quad (3.45)$$

Prethodno navedeni uvjet, ekvivalentan je nelinearnim Hill-Moylandovim uvjetima

$$L_f V(\mathbf{x}) \leq -\varepsilon \mathbf{h}^T \mathbf{h} \quad (3.46)$$

$$L_g V(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) \quad (3.47)$$

*Dokaz.* Dokaz slijedi direktno iz Teorema 3.1. ■

### 3.4 Stabilnost pasivnih nelinearnih dinamičkih sustava

Kao što smo već ustvrdili, ako sustav nije stabilan, nema smisla postavljati dodatne zahtjeve koji se odnose na kvalitetu ponašanja dinamičkog sustava (prijelazno i stacionarno stanje). U ovom potpoglavlju definirat ćemo uvjete stabilnosti za klasu pasivnih afinih nelinearnih sustava. Uvest ćemo definiciju *osmotrivost u nultom stanju*, te uz pomoć tog svojstva uspostaviti uvjete stabilnosti, i uvidjeti povezanost uvjeta sa kriterijima stabilnosti u smislu Lyapunova.

Prema [13], postavljamo sljedeću definiciju:

**Definicija 3.11. (Osmotrivost u nultom stanju)** *Kažemo da je sustav (3.33)-(3.34) osmotriv u nultom stanju, ako uz  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ , slijedi trivijalno rješenje  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ .*

**Lema 3.4. (Osmotrivost sustava u nultom stanju)** *Neka je  $V \geq 0$  rješenje sustava (3.35)-(3.36). Pretpostavimo da je sustav (3.33)-(3.34) osmotriv u nultom stanju, tada je  $V(\mathbf{x}) \geq 0$  za svaki  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .*

*Dokaz.* Neka je  $V \geq 0$  rješenje sustava (3.35)-(3.36). Postavimo upravljački vektor takav da

je  $\mathbf{u} = -\mathbf{y}$ . Integralni oblik izraza (3.37) slijedi,

$$V(\mathbf{x}(T)) - V(\mathbf{0}) \leq \int_0^T -\|\mathbf{y}(t)\|^2 dt, \quad (3.48)$$

te kako je  $V(\mathbf{x}(0)) \geq \int_0^T -\|\mathbf{y}(t)\|^2 dt$ , gdje je  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$ , generiran iz  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{h}(\mathbf{x})$ . Neka je sada  $V(\mathbf{x}(0)) = 0$ . Tada je  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$  za svaki  $t \geq 0$  generiran isto tako iz  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Stoga, pozivanjem na svojstvo osmotrivnosti, slijedi da je  $\mathbf{x}(0) = 0$ , te je time dokaz završen. ■

Ovo svojstvo je ključno u dokazivanju asimptotske stabilnosti, u slučaju izlazne striktno pasivnosti i konačnog  $\mathcal{L}_2$  pojačanja.

Prema [13], uvodimo još jednu definiciju:

**Definicija 3.12. (Opazivost u nultom stanju)** Sustav (3.33)-(3.34) je opaziv u nultom stanju, ako  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ , za svaki  $t \geq 0$  implicira da  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ .

**Lema 3.5. (Opazivost sustava u nultom stanju)** Neka je  $V \geq 0$  rješenje sustava (3.46)-(3.47), uz  $V(\mathbf{0}) = 0$  i  $V(\mathbf{x}) \geq 0$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , te pretpostavimo da je sustav (3.33)-(3.34) opaziv u nultom stanju. Tada je  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  asimptotski stabilno ravnotežno stanje od  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Ako vrijedi dodatan uvjet da je  $V$  odgovarajuća, tada je  $\mathbf{0}$  globalno asimptotski stabilno.

*Dokaz.* Prema [13, Lema 3.2.4]  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  je stabilno ravnotežno stanje od  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Postavljanjem upravljačkog vektora  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  slijedi

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \varepsilon \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2, \quad (3.49)$$

uz  $\varepsilon > 0$ , asimptotska stabilnost slijedi iz LaSalleovog principa invarijantnosti, s obzirom da  $V(\dot{\mathbf{x}}) = 0$  implicira da je  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . ■

Proučimo sada slučaj, kada  $V$  nema striktan (lokalni) minimum u  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ . U tom slučaju,  $V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{0})$  nije Lyapunovljeva funkcija, tj. stabilnost  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  nije zajamčena. Unatoč tomu, uz pomoć dodatnog uvjeta, možemo odrediti uvjete stabilnosti.

Postavimo slijedeći teorem:

**Teorem 3.2. (Stabilnost nestriktnog (lokalnog) minimuma ( $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$ ))** *Neka je  $\mathbf{x}^*$  ravnotežno stanje od  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , i neka je  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^1$   $C^1$ -funkcija, koja je pozitivno semidefinitna u  $\mathbf{x}^*$ , tj.*

$$V(\mathbf{x}^*) = 0, \quad (3.50)$$

$$V(\mathbf{x}) \geq 0. \quad (3.51)$$

*Nadalje, pretpostavimo da je  $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0$ , za svaki  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ . Neka je  $\mathcal{K}$  najveći pozitivno invarijantni skup sadržan u  $\{\mathbf{x} \mid V(\mathbf{x}) = 0\}$ .*

*Ako je  $\mathbf{x}^*$  asimptotski stabilno s obzirom na  $\mathcal{K}$ , tj. ako (2.7) i (2.8) zadovoljavaju za  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{K}$ , tada je  $\mathbf{x}_0$  stabilno ravnotežno stanje sustava  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ .*

Isto tako, postavimo uvjete za asimptotsku stabilnost nelinearnog pasivnog dinamičkog sustava:

**Teorem 3.3. (Asimptotska stabilnost nestriktnog (lokalnog) minimuma ( $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$ ))** *Neka je  $S \geq 0$ , uz  $S(\mathbf{0}) = 0$  rješenje (3.35) i (3.36). Neka je  $\mathcal{K}$  najveći pozitivan invarijantni skup sadržan u  $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ . Ako je  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  asimptotski stabilno s obzirom na  $\mathcal{K}$ , tada je i  $\mathbf{0}$  ravnotežno stanje sustava  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Nadalje, ako je  $S$  rješenje (3.46) i (3.47), tada je  $\mathbf{0}$  asimptotski stabilno ravnotežno stanje. Primjetimo da uvjet, da je  $\mathbf{0}$  asimptotski stabilno ravnotežno stanje sustava  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , može se smatrati pretpostavkom osmotrivosti sustava (3.33) i (3.34), s obzirom da  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ ,  $t \geq 0$  implicira  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  za vrijednosti  $\mathbf{x}_0$ , u okolišu  $\mathbf{0}$ . Za detaljniji dokaz, pogledati u [13].*

## Hamiltonski sustavi

Na osnovu prethodnog poglavlja, vidjeli smo da svi realni fizikalni sustavi spadaju u klasu disipativnih, odnosno pasivnih sustava. U ovom poglavlju vidjet ćemo da dinamika bilo kojeg elektro-mehaničkog sustava ima tzv. Hamiltonsku strukturu, zapravo, vidjet ćemo da jednadžbe gibanja svih realnih sustava imaju Hamiltonsku strukturu<sup>1</sup>. Pretpostavit ćemo da su dinamičke jednadžbe izvedene na osnovu fundamentalnih fizikalnih zakona očuvanja energije i mase, bez aproksimacija i linearizacija.

### 4.1 Euler-Lagrangeove i Hamiltonove jednadžbe

Svi elektro-mehanički sustavi, mogu se modelirati Euler-Lagrangeovim jednadžbama koje su izvedene na temelju zakona očuvanja energije.

Za početak, promotrimo sustav sa  $n$  stupnjeva slobode gibanja, čiju dinamiku možemo opisati *Euler-Lagrangeovim jednadžbama*

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right]^T - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right]^T = \mathbf{u}, \quad (4.1)$$

gdje je  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  vektor poopćenih koordinata,  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  je vektor poopćenih brzina,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  je vektor poopćenih sila koje djeluju na sustava, a  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , predstavlja *Lagrangian* sustava  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$ , gdje je  $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  kinetička energija sustava

---

<sup>1</sup>Hamiltonsku mehaniku je prvi puta formuirao irski matematičar i fizičar Sir William Rowan Hamilton, 1833. godine.

i  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  potencijalna energija sustava. Nadalje, neka je  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Legendrova transformacija Lagrangiana  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  s obzirom na brzinu  $\dot{\mathbf{q}}$  definiran sa

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \triangleq \mathbf{q}^T \mathbf{p} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \big|_{\dot{\mathbf{q}}=\Phi^{-1}(\mathbf{p})}. \quad (4.2)$$

U ovom slučaju  $\mathbf{p}$  predstavlja vektor poopćenih impulsa

$$\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right]^T, \quad (4.3)$$

a  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je bijektivno preslikavanje iz poopćenih brzina  $\dot{\mathbf{q}}$  u poopćene impulse  $\mathbf{p}$ .

Uzmimo u obzir da je kinetička energija sustava kvadratična forma po poopćenim brzinama, tj.

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (4.4)$$

gdje je  $M(\mathbf{q})$  pozitivno definitna simetrična inercijska matrica mehaničkog sustava dimenzije  $n \times n$ . Da bismo sustav od  $n$  jednadžbi drugog reda (4.1) transformirali u sustav od  $2n$  jednadžbi prvog reda, uvodimo slijedeću smjenu koordinata:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (4.5)$$

tako da jednadžbe (4.1) postaju

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (4.6)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathbf{u}, \quad (4.7)$$

gdje je

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + V(\mathbf{q}), \quad (4.8)$$

totalna energija koju zovemo *Hamiltonian*, dok jednadžbe (4.6) i (4.7) zovemo *Hamilton-*

skim jednadžbama gibanja. Sustave čiju dinamiku možemo prikazati u tom obliku nazivamo *Hamiltonski sustavi*.

## 4.2 Pasivnost i disipativnost Hamiltonskih sustava

S obzirom da Hamiltonian odgovara totalnoj energiji sustava, možemo ga uzeti kao "storage function". Dakle, ako je  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  donje ograničen, uvijek možemo premjestiti (engl. *shift*)  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , tako da uz malu zloupotrebu notacije vrijedi,  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \geq 0$ ,  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , i  $\mathcal{H}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ .

U tom slučaju, koristeći (4.1) i uz činjenicu da je

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \ddot{\mathbf{q}}, \quad (4.9)$$

slijedi da je,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{q}} &= \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right\} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{d}{dt} [\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]^T \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{d}{dt} [\mathbf{p}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}] - \mathbf{p}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \ddot{\mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ &= \frac{d}{dt} [\mathbf{p}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \\ &= \frac{d}{dt} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Stoga, uz  $V_s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  i  $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{q}}$ , slijedi iz [6, Teorem 5.5], da je Euler-Lagrangeov sustav (4.1) bez gubitaka (engl. *lossless*) s obzirom na supply rate funkciju  $s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{q}}$ . Što upravo predstavlja zakon očuvanja energije, koji navodi da je prirast totalnoj energiji sustava  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  jednak dobavljenom radu nastalom djelovanjem pooptćenih sila  $\mathbf{u}$ .

Alternativno, ako dinamički sustav sa  $n$  stupnjeva slobode gibanja posjeduje unutarnju

disipaciju, tada Euler-Lagrangeova jednadžba poprima slijedeći oblik

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right]^T - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right]^T + \left[ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}) \right]^T = \mathbf{u}, \quad (4.11)$$

gdje je  $\mathcal{R} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  predstavlja *Rayleighovu disipacijsku funkciju*, koja zadovoljava  $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \geq 0$ ,  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ . U tom slučaju, koristeći (4.9) i (4.11) slijedi da je,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{q}} &= \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}) \right\} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{d}{dt} [\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]^T \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{d}{dt} [\mathbf{p}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] - \mathbf{p}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\ddot{\mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \quad (4.12) \\ &= \frac{d}{dt} [\mathbf{p}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{d}{dt} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

ili, ekvivalentno, integrirajući na intervalu  $[0, T]$ ,

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}(T), \mathbf{p}(T)) = \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) + \int_0^T \mathbf{u}^T(s)\dot{\mathbf{q}}(s) ds - \int_0^T \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}(s))\dot{\mathbf{q}}(s) ds. \quad (4.13)$$

Jednadžba (4.13) pokazuje da je totalna energija sustava u trenutku  $t = T$  jednaka zbroju početne akumulirane energije sustava, i energije dobavljene djelovanjem vanjske sile  $\mathbf{u}$ , minus unutarnja disipacijska energija. S obzirom da vrijedi  $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \geq 0$ ,  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ , slijedi iz [6, Korolar 5.1], da je Euler-Lagrangeov sustav (4.12) disipativan s obzirom na supply rate funkciju  $s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^T \mathbf{y}$ , gdje je  $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{q}}$ , uz storage funkciju  $V_s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))$ . Sada ćemo izračunati dostupnu energiju, te potrebnu energiju za Euler-Lagrangeov sustav (4.11). Pozivajući se na [6, Definicija 5.1], i činjenicu da je preslikavanje između poopcenih koordinata

i poopćenih imuplsa bijektivno, dobivamo

$$\begin{aligned}
 V_a(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) &= \sup_{\mathbf{u}(\cdot), T \geq 0} \left[ - \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \dot{\mathbf{q}}(t) dt \right] \\
 &= \sup_{\mathbf{u}(\cdot), T \geq 0} \left\{ - \int_0^T \left[ \frac{d}{dt} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \right] dt \right\} \\
 &= \sup_{\mathbf{u}(\cdot), T \geq 0} \left[ - \mathcal{H}(\mathbf{q}(T), \mathbf{p}(T)) + \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) - \int_0^T \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}(t)) \dot{\mathbf{q}}(t) dt \right] \\
 &\leq \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Primjetimo u slučaju da je  $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \equiv 0$ , slijedi da je  $V_a(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) = \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))$ , što pokazuje da je dostupna energija, ništa drugo nego totalna energija sustava.

Alternativno, koristeći [6, Jednadžbu 5.34] dobivamo,

$$\begin{aligned}
 V_r(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) &= \inf_{\mathbf{u}(\cdot), T \geq 0} \left[ \int_{-T}^0 \mathbf{u}^T(t) \dot{\mathbf{q}}(t) dt \right] \\
 &= \inf_{\mathbf{u}(\cdot), T \geq 0} \left\{ - \int_{-T}^0 \left[ \frac{d}{dt} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \right] dt \right\} \\
 &= \inf_{\mathbf{u}(\cdot), T \geq 0} \left[ \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) - \mathcal{H}(\mathbf{q}(-T), \mathbf{p}(-T)) + \int_{-T}^0 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}(t)) \dot{\mathbf{q}}(t) dt \right] \\
 &\geq \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)),
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

gdje je  $(\mathbf{q}(-T), \mathbf{p}(-T)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ . Stoga je,  $V_a(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) \leq \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) \leq V_r(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$ . Primjetimo da u slučaju da je  $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \equiv 0$ , slijedi iz (4.15),

$$V_r(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) = \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) - \mathcal{H}(\mathbf{q}(-T), \mathbf{p}(-T)) = \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)), \tag{4.16}$$

stoga na kraju dobivamo jednakost  $V_r(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) = V_a(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) = \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))$ .



### 4.3 Port-controlled Hamiltonski sustavi

U slijedećem potpoglavlju, izvest ćemo iz Euler-Lagrangeovih jednadžbi, proširene Hamiltonske jednadžbe gibanja. Te jednadžbe daju fundamentalnu strukturu matematičkih opisa brojnih fizikalnih dinamičkih sustava, temeljenih na zakonu očuvanja energije i unutarnjoj strukturnoj povezanosti dinamičkih sustava (engl. *internal interconnection structural properties*). Analogno smjeni koordinata u prethodnom potpoglavlju, dobivamo slijedeću proširenu jednadžbu

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right]^T \\
 &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right]^T - \left[ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}) \right]^T + \mathbf{u} \\
 &= - \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right]^T - \left[ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}) \right]^T + \mathbf{u},
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Uz pretpostavku da je Rayleighova disipacijska funkcija  $\mathcal{R} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  kvadratične forme, tj.  $\mathcal{R} = (\dot{\mathbf{q}})^T \frac{1}{2} \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}$ , gdje je  $\mathbf{D}$  nenegativno definitna disipacijska matrica sustava, (4.17) implicira

$$\dot{\mathbf{p}} = - \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right)^T - \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{u}. \tag{4.18}$$

Zatim iz (4.2) slijedi da je

$$\mathbf{q} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right)^T. \tag{4.19}$$

Jednadžbe (4.17) i (4.19) mogu se konciznije napisati kao

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathcal{J} - \mathcal{R}] \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \right)^T + \mathbf{g} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0, \tag{4.20}$$

gdje je  $\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T, \mathbf{p}^T]^T$  i

$$\mathcal{J} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Dinamički sustav (4.20) s definiranim izlaznim vektorm  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}(t)) \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \right)^T$  nazivamo *Hamiltonski sustav*.

Hamiltonski sustav (4.20) možemo dodatno poopćiti, što se obično referira kao *port-controlled Hamiltonski sustav* opisan u lokalnim koordinatama  $\mathbf{x} \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ . PCH sustav definiran je na sljedeći način

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathcal{J}(\mathbf{x}(t)) - \mathcal{R}(\mathbf{x}(t))] \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \right)^T + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}(t)) \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \right)^T, \quad (4.23)$$

gdje je  $\mathbf{x} \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{D}$  je otvoreni skup sa  $\mathbf{0} \in \mathcal{D}$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^l$ ,  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je kontinuirano diferencijabilna Hamiltonska funkcija za sustav (4.22) i (4.23).  $\mathcal{J} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  je antisimetrična matična funkcija,  $\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \mathcal{J}^T(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{R} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{S}^n$  je takva da vrijedi  $\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \mathcal{R}^T(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ ,  $[\mathcal{J}(\mathbf{x}) - \mathcal{R}(\mathbf{x})] \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right)^T$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  je Lipschitz kontinuirana na  $\mathcal{D}$ , i  $\mathbf{g} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ . Antisimetrična matična funkcija  $\mathcal{J}(\mathbf{x})$  definira unutarnju strukturnu povezanost, stoga se često naziva matrica unutarnjih strukturnih veza (engl. *interconnection matrix*), ulazna matična funkcija  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  opisuje vezu sustava sa vanjskim okolišem, dok  $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  označava disipaciju sustava.

Pod pretpostavkom da je Hamiltonian  $\mathcal{H}(\cdot)$  donje ograničena funkcija, može se pokazati da port-controlled Hamiltonski sustav omogućuju energijsku ravnotežu u smislu akumulirane energije, dobavljene energije i disipirane energije. Naročito, ako izračunamo promjenu Hamiltoniana s obzirom na trajektoriju sustava  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t \geq 0$ , slijedi da je jednadžba očuvanja energije

$$\dot{\mathcal{H}}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{u}^T(t)\mathbf{y}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t))\mathcal{R}(\mathbf{x}(t)) \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \right)^T, \quad t \geq 0, \quad (4.24)$$

što pokazuje, da je brzina promjene energije, ili snage, jednaka razlici dobavljene energije i disipirane energije. Primjetimo, da se (4.24) ekvivalentno može zapisati kao

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(0)) - \mathcal{H}(\mathbf{x}(t)) = \int_0^t \mathbf{u}^T(s) \mathbf{y}(s) ds - \int_0^t \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(s)) \mathcal{R}(\mathbf{x}(s)) \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(s)) \right)^T ds. \quad (4.25)$$

Jednadžba (4.25) pokazuje da je akumulirana energija jednaka razlici dobavljene energije sustava preko vanjskog ulaznog vektora  $\mathbf{u}$  i disipirane energije u intervalu  $[0, t]$ . S obzirom da je  $\mathcal{R}(\mathbf{x})$  nenegativna matrica za svaki  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , iz (4.25) slijedi

$$-\int_0^t \mathbf{u}^T(s) \mathbf{y}(s) ds \leq \mathcal{H}(\mathbf{x}(0)), \quad (4.26)$$

što znači, da je energija iskorištena iz PCH sustava, manja ili jednaka početnoj energiji sustava. Stoga, PCH sustavi disipativni su s obzirom na dobavljenu energiju  $r(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^T \mathbf{y}$ . Nadalje, primijetimo da je u slučaju kada nema disipacije sustava, tj.  $\mathcal{R}(\mathbf{x}) \equiv 0$ , PCH sustav bez gubitaka s obzirom na dobavljenu energiju  $r(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^T \mathbf{y}$ .

Konačno možemo iskoristiti svojstvo antisimetričnosti matrice unutarnjih strukturnih veza  $\mathcal{J}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , kako bismo utvrdili postojanje *Casimirove funkcije* za PCH sustave. Nadasve, neka je  $\mathcal{C} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , takva da vrijedi

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) [\mathcal{J}(\mathbf{x}) - \mathcal{R}(\mathbf{x})] = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D} \quad (4.27)$$

U ovom slučaju, slijedi da je

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) [\mathcal{J}(\mathbf{x}) - \mathcal{R}(\mathbf{x})] \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \\ &= \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ako je  $\mathbf{u}(t) \equiv 0$  ili  $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , tada je  $\mathcal{C} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  konzervativna uzduž toka (4.22), bez obzira na oblik Hamiltoniana.

Primjetimo da je (4.27) implicirana i sa jačim uvjetima

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathcal{J}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}. \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathcal{R}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}. \quad (4.30)$$

S obzirom na da vrijedi uvjet antisimetričnosti  $\mathcal{J}(\mathbf{x}) = -\mathcal{J}^T(\mathbf{x})$  i simetričnosti  $\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \mathcal{R}^T(\mathbf{x})$ , te uz (4.29) i (4.38), slijedi da je

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) [\mathcal{J}(\mathbf{x}) - \mathcal{R}(\mathbf{x})] \left( \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}. \quad (4.31)$$

Koristeći činjenicu da je suma antisimetrične i simetrične matrice jednaka nuli, ako i samo ako su i individualne matrice jednake nuli, tada slijedi da (4.29) i (4.38) zadovoljavaju, ako i samo ako (4.27) i (4.39) zadovoljavaju. Ako Hamiltonian sustava  $\mathcal{H}(\cdot)$  nije pozitivno definitna funkcija u ravnotežnom stanju  $\mathbf{x}_e \in \mathcal{D}$ , tada konstruirajući  $\mathcal{H}_e(\mathbf{x}) = \mathcal{H}(\mathbf{x}) + \mathcal{H}_c(\mathbf{x})$ , takav da je  $\mathcal{H}_e(\mathbf{x})$ .

### Povratna sprega port-controlled Hamiltonskog sustava

Razmotrimo sada upravljanje na temelju energije za PCH sustave, gdje se energijsko oblikovanje postiže kombiniranjem energije samog sustava i energije regulatora, i PCH sustav definiran sa (4.22) i (4.23), nadalje razmotrimo slučaj da je regulator PCH sustav s disipacijom, opisan slijedećim jednadžbama

$$\mathbf{z}(t) = [\mathcal{J}_c(\mathbf{z}(t)) - \mathcal{R}_c(\mathbf{z}(t))] \left( \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}(t)) \right)^T + \mathbf{g}_c(\mathbf{z}(t)) \mathbf{u}_c(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad t \geq 0, \quad (4.32)$$

$$\mathbf{y}_c(t) = \mathbf{g}_c^T(\mathbf{z}(t)) \left( \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}(t)) \right)^T, \quad (4.33)$$

gdje je  $\mathbf{z} \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n_c}$ ,  $\mathcal{D}$  je otvoreni skup sa  $\mathbf{0} \in \mathcal{D}$ ,  $\mathbf{u}_c(t) \in \mathcal{U}_c \subseteq \mathbb{R}^{m_c}$ ,  $\mathbf{y}_c(t) \in \mathcal{Y}_c \subseteq \mathbb{R}^{l_c}$ ,  $\mathcal{H}_c : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  je kontinuirano diferencijabilna Hamiltonska funkcija za sustav (4.22) i (4.23).  $\mathcal{J}_c : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$  je antisimetrična matrična funkcija,  $\mathcal{J}_c(\mathbf{z}) = \mathcal{J}_c^T(\mathbf{z})$ ,  $\mathcal{R}_c : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{S}^{n_c}$  je takva da vrijedi  $\mathcal{R}_c(\mathbf{z}) = \mathcal{R}_c^T(\mathbf{z})^T \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathcal{D}$ ,  $[\mathcal{J}_c(\mathbf{z}) - \mathcal{R}_c(\mathbf{z})] \left( \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}) \right)^T$ ,  $\mathbf{z} \in \mathcal{D}$  je

Lipschitz kontinuirana na  $\mathcal{D}$ , i  $\mathbf{g}_c : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c \times m_c}$ .

Definirajmo povratnu vezu između sustava na način tako da je

$$\mathbf{u} = -\mathbf{y}_c, \quad \mathbf{u}_c = \mathbf{y}. \quad (4.34)$$

Tada sustav u zatvorenoj petlji ima oblik

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \left( \begin{bmatrix} \mathcal{J}(\mathbf{x}(t)) & -\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))\mathbf{g}_c^T(\mathbf{z}(t)) \\ -\mathbf{g}_c(\mathbf{z}(t))\mathbf{g}^T(\mathbf{x}(t)) & \mathcal{J}_c(\mathbf{z}(t)) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{R}(\mathbf{x}(t)) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{R}_c(\mathbf{x}(t)) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \right)^T \\ \left( \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}(t)) \right)^T \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(0) &= \dot{\hat{\mathbf{x}}}_0, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

gdje je  $\dot{\hat{\mathbf{x}}} \triangleq [\mathbf{x}^T \mathbf{z}^T]^T$ . Ako definiramo povratnu vezu na slijedeći način

$$\mathbf{u} = -\mathbf{y}_c + \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}_c = \mathbf{y} + \mathbf{v}_c. \quad (4.36)$$

Sustav u zatvorenoj petlji poprima slijedeći oblik

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \left( \begin{bmatrix} \mathcal{J}(\mathbf{x}(t)) & -\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))\mathbf{g}_c^T(\mathbf{z}(t)) \\ -\mathbf{g}_c(\mathbf{z}(t))\mathbf{g}^T(\mathbf{x}(t)) & \mathcal{J}_c(\mathbf{z}(t)) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{R}(\mathbf{x}(t)) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{R}_c(\mathbf{x}(t)) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \right)^T \\ \left( \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}(t)) \right)^T \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}(\mathbf{z}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{v}_c(t) \end{bmatrix} \quad \dot{\hat{\mathbf{x}}}(0) = \dot{\hat{\mathbf{x}}}_0, \quad t \geq 0, \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}(\mathbf{z}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \right)^T \\ \left( \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}(t)) \right)^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Isto tako, primjetimo da je sustav u zatvorenoj petlji ponovno PCH sustav s disipacijom, totalnim Hamiltonom  $\mathcal{H}(\mathbf{x}) + \mathcal{H}_c(\mathbf{z})$ , vanjskim signalom  $[\mathbf{v}^T \mathbf{v}_c^T]^T$ , i izlaznim vektorom  $[\mathbf{y}^T \mathbf{y}_c^T]^T$ . Dakle povratna sprega dva PCH sustava je ponovno PCH sustav.

## 4.4 Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control (IDA-PBC)

Kao što smo već napomenuli u prethodnom potpoglavlju, osim stabilizacije regulacijskog kruga, cilj je da taj krug i dalje ostane PCH sustav. Pretpostavimo da želimo definirati upravljački zakon  $\mathbf{u} = \beta(\mathbf{x})$ , koji će omogućiti da nelinearni afini sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (4.38)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (4.39)$$

gdje je  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$  i  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ , poprimi port-controlled Hamiltonski oblik sustava

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathcal{J}(\mathbf{x}) - \mathcal{R}(\mathbf{x})] \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right)^T + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0. \quad (4.40)$$

Ako Hamiltonian  $\mathcal{H}(\mathbf{x})$  ima striktni minimum u ravnotežnoj točki, tada ga možemo izabrati kao kandidata za Lyapunovljevu funkciju, za analizu stabilnosti sustava, i u dizajnu *passivity-based regulatora*. Nažalost, u realnim fizikalnim sustavima, Hamiltonian vrlo rijetko ima minimum u željenom ravnotežnom stanju, ili jednostavno dinamičko ponašanje sustava nije zadovoljavajuće; stoga je IDA-PBC potreban za oblikovanje funkcije energije, matrice unutarnjih strukturnih veza i disipacijske matrice, kako bi se dobio željeni Hamiltonian, ili poboljšala sama dinamika sustava.

Generalno, za realizaciju disipacijskog Hamiltoniana sustava (4.38) i (4.39), imamo sljedeći rezultat [11]:

**Lema 4.1. (O IDA-PBC upravljačkom algoritmu)** *Razmotirimo sustav definiran jednadžbama (4.38) i (4.39). Pretpostavimo da postoje matrice  $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{J}_d(\mathbf{x}) = -\mathcal{J}_d^T(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{R}_d(\mathbf{x}) = \mathcal{R}_d^T(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$  i diferencijalna funkcija  $\mathcal{H}_d(\mathbf{x})$ , takva da vrijedi sljedeća parcijalna diferencijalna*

jednadžba

$$\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})[\mathcal{J}_d(\mathbf{x}) - \mathcal{R}_d(\mathbf{x})]\frac{\partial\mathcal{H}_d}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}), \quad (4.41)$$

gdje je  $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})$  lijevi anihilator od  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , tj.  $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ , a  $\mathcal{H}_d(\mathbf{x})$  je takav da vrijedi

$$\mathbf{x}^* = \arg \min \mathcal{H}_d(\mathbf{x}) \quad (4.42)$$

gdje je  $\mathbf{x}^*$  željeno stabilizirano ravnotežno stanje. Sada trebamo definirati upravljački zakon  $\mathbf{u} = \beta(\mathbf{x})$  koji će omogućiti poklapanje modela (4.38) i (4.40)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})\mathbf{u} = [\mathcal{J}_d(\mathbf{x}) - \mathcal{R}_d(\mathbf{x})]\left(\frac{\partial\mathcal{H}_d}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x})\right)^T + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}. \quad (4.43)$$

Pomnožimo li prethodni izraz sa pseudoinverzom  $[\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})]^{-1}\mathbf{g}^T(\mathbf{x})$ , dobivamo

$$\beta(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})]^{-1}\mathbf{g}^T(\mathbf{x})\left[[\mathcal{J}_d(\mathbf{x}) - \mathcal{R}_d(\mathbf{x})]\left(\frac{\partial\mathcal{H}_d}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x})\right)^T - \mathbf{f}(\mathbf{x})\right]. \quad (4.44)$$

Dobiveni zakon upravljanja transformira nelinearni sustav (4.38) u PCH sustav (4.40). Nadalje, ako je najveći invarijantni skup

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\nabla\mathcal{H}_d|^T\mathcal{R}_d(\mathbf{x})|\nabla\mathcal{H}_d| = 0\} = \{\mathbf{x}^*\}, \quad (4.45)$$

znači da je Hamiltonian  $\mathcal{H}_d(\mathbf{x})$  ujedno i Lyapunovljeva funkcija, te da je zatvoreni krug asimptotski stabilan, koja slijedi iz LaSalleovog principa invarijantnosti.

Kako bismo uopće mogli nelinearni sustav (4.38) razmatrati u okvirima PCH sustava, ključan dio dizajna upravljačkog zakona tj. regulatora je rješavanje parcijalne diferencijalne jednadžbe (4.41), koja će biti nelinearna, ako je i sam sustav nelinearan. Međutim, trebamo imati u vidu

- Matrice  $\mathcal{J}_d(\mathbf{x})$  i  $\mathcal{R}_d(\mathbf{x})$  su slobodne, uz uvjet antisimetričnosti i simetričnosti.
- Hamiltonian  $\mathcal{H}_d(\mathbf{x})$  može biti totalno ili djelomično fiksiran uz uvjet da minimum Ha-

miltoniana odgovara željenom ravnotežnom stanju.

- Postoji dodatni stupanj slobode u izboru anihilatora  $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})$  s obzirom da on nije jedinstveno definiran sa  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ .

Pogledajmo sada jednostavni primjer [6, Primjer 6.3].

**Primjer 4.1 (Inverzno njihalo).** *Razmotrimo inverzno njihalo mase  $m = 1$  kg i duljine  $L = 1$  m. Sustav je opisan slijedećom dinamikom*

$$\ddot{\theta}(t) - g \sin(t) = u(t), \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad t \geq 0, \quad (4.46)$$

gdje je  $g$  gravitacijska konstanta, a  $u(\cdot)$  upravljačka sila. Ako definiramo  $x_1 = \theta$  i  $x_2 = \dot{\theta}$ , uz  $\mathbf{x} \triangleq [x_1 \ x_2]^T$ , možemo formulirati jednadžbe gibanja na slijedeći način

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

$\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ , a totalni Hamiltonian sustava je  $\mathcal{H}(x) = \frac{x_2^2}{2} + g \cos(x_1)$ .

Slijedeće, kako bismo stabilizirali ravnotežnu točku  $\mathbf{x}_e \triangleq [\theta_e \ 0]^T$ , definiramo  $\mathcal{H}(x) = \frac{x_2^2}{2} + \frac{1}{2}(x_1 - \theta_e)^2$  za sustav u zatvorenoj petlji. Nadalje, definiramo

$$\mathcal{J}_d(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathcal{R}_d(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}. \quad (4.48)$$

U tom slučaju na osnovu [6, Teorem 6.3] slijedi da je upravljački zakon  $\mathbf{u}(t) = x_2 + (x_1 - \theta) - g \sin(x_1)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ . Primjetimo da vrijedi,  $\dot{\mathcal{H}} = x_2^2 \leq 0$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ . Stoga,  $\mathcal{R} \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} : \dot{\mathcal{H}} = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} : x_2 = 0\}$ . Konačno, s obzirom da za svaki  $x \in \mathcal{R}$ ,  $\dot{x}_2 \neq 0$  samo ako vrijedi da je  $x_1 \neq \theta_e$ . Slijedi da najveći invarijanti skup sadržan u  $\mathcal{R}$  je dan sa  $\mathcal{M} = \{x_e\}$ , te je ravnotežno rješenje  $\mathbf{x} \equiv [\theta_e \ 0]^T$  asimptotski stabilno.



## Perturbacijska metoda homotopije

Problemi koje nalazimo u analizi nelinearnih dinamičkih sustava definitivno nisu trivijalni, ali su vitalni kako u matematici i fizici, tako i u inženjerstvu. Svijet koji nas okružuje je inherentno nelinearan, te većina nelinearnih fenomena su modeli naših realnih problema. Najmoćniji alat koji opisuje te prirodne fenomene su diferencijalne jednačbe. Isto tako, sve velike teorije u inženjerstvu, počivaju na diferencijalnim jednačbama. Teorija o integralnom i diferencijalnom računu, počinje sa Leibnitzom i Newtonom, pa nastavlja preko Eulera, Hamiltona, Maxwella i mnogih drugih velikih matematičara i fizičara u definiranju naših prirodnih zakona. Nelinearne diferencijalne jednačbe se široko koriste, kao modeli pri opisu kompleksnih fizikalnih fenomena u mehanici fluida, fizici krutog tijela, prijenosu topline, teoriji vibracija, elektrodinamici itd. Za razliku od linearne teorije, koja počiva na principu superpozicije, nažalost u nelinearnoj teoriji rješenja se ne mogu nadodavati, kako bismo dobili širu sliku. Mnoge matematičke tehnike razvijene su, te između ostalih i perturbacijske metode, upravo kako bismo mogli, zaviriti su svijet nelinearnih problema, te na taj način bolje razumjeli svijet oko nas.

### 5.1 Standardna perturbacijska metoda

Unatoč naporima mnogih matematičara, egzaktno analitičko rješenje nelinearnih sustava, moguće je sam za ograničen broj klasa diferencijalnih jednačbi. Postoje dva pristupa traženju aproksimativnih rješenja nelinearnih jednačbi:

- numeričke metode,
- asimptotske metode (perturbacijske metode).

Pretpostavimo slijedeći nelinearni dinamički sustav opisan diferencijalnim jednadžbama

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), \quad \mathbf{x}_0(t_0) = \hat{\mathbf{x}}(\varepsilon) \quad (5.1)$$

gdje je  $\varepsilon$  mali skalarni parametar. Pretpostavimo da je  $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$  rješenje sustava (5.1). Ideja asimptotskih metoda je, dobiti aproksimativno rješenje  $\tilde{\mathbf{x}}(t, \varepsilon)$ , takvo da je odstupanje od pravog rješenja što manje, ako je i parametar  $\varepsilon$  mali. Aproksimativno rješenje je izraženo jednadžbama koje su jednostavnije nego početni problem. Obično se radi o nehomogenim linearnim vremenski varijabilnim jednadžbama.

Ideja perturbacijske metode leži upravo u tome što je  $\varepsilon$  mali skalarni parametar  $\varepsilon \ll 1$ , što ujedno znači da su i potencije  $\varepsilon^2, \varepsilon^3 \dots$  izrazito mali brojevi. S obzirom da rješenje sustava  $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$  ovisi o  $\varepsilon$ , prikazat ćemo ga u obliku reda potencija u ovisnosti o parametru  $\varepsilon$

$$\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \mathbf{x}_0(t) + \varepsilon \mathbf{x}_1(t) + \varepsilon^2 \mathbf{x}_2(t) + \varepsilon^3 \mathbf{x}_3(t) + \dots = \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon^i \mathbf{x}_i(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^N), \quad (5.2)$$

gdje su  $\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \mathbf{x}_3(t), \dots$  nepoznate funkcije, dok je  $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$  ostatak  $N$ -tog reda. Početni uvjet  $\hat{\mathbf{x}}(\varepsilon)$ , isto tako možemo razviti u Taylorov red

$$\hat{\mathbf{x}}(\varepsilon) = \hat{\mathbf{x}}_0 + \varepsilon \hat{\mathbf{x}}_1 + \varepsilon^2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \varepsilon^3 \hat{\mathbf{x}}_3 + \dots = \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon^i \hat{\mathbf{x}}_i + \mathcal{O}(\varepsilon^N), \quad (5.3)$$

tako da imamo slijedeće početne uvjete za funkcije  $\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \mathbf{x}_3(t), \dots$

$$\mathbf{x}_k(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.4)$$

Substitucijom izraza (5.3) u izraz (5.1) dobivamo

$$\sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon^i \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^N). \quad (5.5)$$

Nadalje, funkciju  $\mathbf{h}(t, \varepsilon) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$  možemo razviti u Taylorov red u ovisnosti o skalar-nom parametru  $\varepsilon$

$$\mathbf{h}(t, \varepsilon) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon^i \mathbf{h}_i(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^N), \quad (5.6)$$

gdje su  $\mathbf{h}_k$  koeficijenti Taylorovog razvoja funkcije  $\mathbf{h}(\varepsilon, t)$ ,

$$\mathbf{h}_k = \left. \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k} \mathbf{h}(\varepsilon, t) \right|_{\varepsilon=0}. \quad (5.7)$$

Uvrstimo li u razvoj funkcije (5.5) i (5.6), te separiramo sve članove sa istim potencijama po parametru  $\varepsilon$ , dobivamo

$$\sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon^i [\dot{\mathbf{x}}_i(t) - \mathbf{h}_i] = \mathcal{O}(\varepsilon^N). \quad (5.8)$$

U slučaju izostavljanja članova višeg reda, tj. ako pretpostavimo da je  $\mathcal{O}(\varepsilon^N) = 0$ , prethodna jednadžba je zadovoljena, ako vrijedi

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{h}_k, \quad \mathbf{x}_k(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.9)$$

Sada ćemo odrediti prva tri koeficijenta Taylorovog razvoja (5.6). Koeficijent nultog reda  $\mathbf{h}_0(t)$  dan je sa

$$\mathbf{h}_0(t) = \mathbf{h}(0, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, 0), t, 0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), t, 0), \quad (5.10)$$

gdje je  $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}(t, 0)$  rješenje neperturbiranog sustava (5.1), tj.

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t, 0), \quad \mathbf{x}_0(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0. \quad (5.11)$$

Koeficijent prvog reda  $\mathbf{h}_1(t)$ , dan je sa

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_1(t) &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbf{h}(\varepsilon, t) \right|_{\varepsilon=0} = \\ &= \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right] \bigg|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0(t), t, 0) \mathbf{x}_1(t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}_0(t), t, 0),\end{aligned}\tag{5.12}$$

gdje smo primijenili pravilo deriviranja kompozicije funkcija, činjenicu da je  $\left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = \mathbf{x}_1(t)$ , te definiciju  $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}(t, 0)$ . Primjenimo li sada izraz (5.9) za  $k = 1$ , dobivamo slijedeću diferencijalnu jednadžbu za funkciju  $\mathbf{x}_1(t)$ ,

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0(t), t, 0) \mathbf{x}_1(t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}_0(t), t, 0), \quad \mathbf{x}_1(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_1.\tag{5.13}$$

Ako uvedemo slijedeće oznake

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0(t), t, 0), \quad \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0(t), t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}_0(t), t, 0),\tag{5.14}$$

jednadžbu (5.13) možemo prikazati u slijedećem obliku

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}_1 + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0(t), t), \quad \mathbf{x}_1(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_1,\tag{5.15}$$

iz kojeg direktno vidimo da se radi o nehomogenoj linearnoj vremenski varijabilnoj diferencijalnoj jednadžbi.

Za članove višeg reda, postupak ponavljamo, što naravno, iziskuje računanje derivacija višeg reda funkcije  $\mathbf{f}$  po  $\mathbf{x}$ , što će imati za posljedice komplicirani prikaz koeficijenata  $\mathbf{h}_k(t)$  višeg reda. Navedimo još izraz za koeficijent drugog reda  $\mathbf{h}_2(t)$ ,

$$\mathbf{h}_2(t) = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \mathbf{h}(\varepsilon, t) \right|_{\varepsilon=0} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), t),\tag{5.16}$$

gdje je

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), t) = & \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0(t), t, 0) \mathbf{x}_1(t) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0(t), t, 0) \mathbf{x}_1(t) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}(\mathbf{x}_0(t), t, 0), \end{aligned} \quad (5.17)$$

i

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, \varepsilon, t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \varepsilon, t) \mathbf{x}_1(t). \quad (5.18)$$

Primjenimo li sada izraz (5.9) za  $k = 2$ , dobivamo slijedeću diferencijalnu jednadžbu za funkciju  $\mathbf{x}_2(t)$ ,

$$\dot{\mathbf{h}}_2(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), t), \quad \mathbf{x}_2(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_2. \quad (5.19)$$

Ponavljanjem navedene procedure za određivanje članova višeg reda, dobivamo slijedeći sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t, 0), \quad \mathbf{x}_0(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_k(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}_k(t) + \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_{k-1}(t), t), \quad \mathbf{x}_k(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_k, \end{aligned} \quad (5.20)$$

za  $k = 1, 2, \dots, N - 1$  gdje je  $\mathbf{A}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$  *Jacobian* evaluiran u  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t)$  i  $\varepsilon = 0$ , dok je član  $\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_{k-1}(t), t)$  polinomialna vektorska funkcija po  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}(t)$ .

Kao što smo prethodno utvrdili, dobivene diferencijalne jednadžbe spadaju u klasu linearnih nehomogenih vremenski varijabilnih jednadžbi. Nehomogeni član svake diferencijalne jednadžbe sadrži rješenja prethodne diferencijalne jednažbe, čime se omogućuje rekurzivno računanje članova višeg reda.

Pogledajmo sada jednostavni primjer [9, Primjer 1.].

**Primjer 5.1 (Perturbacijska metoda).** *Razmotrimo skalarnu nelinearnu diferencijalnu jednadžbu*

$$\dot{x} = x + \varepsilon x^2, \quad x(0) = x_0, \quad (0 < \varepsilon \ll 1). \quad (5.21)$$

Želimo li naći perturbativno rješenje, do drugog reda po skalarnom parametru  $\varepsilon$ , tj.

$$x(t, 0) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (5.22)$$

Substitucijom (5.22) u (5.21), dobivamo

$$\dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \dot{x}_2(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon [x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t)]^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (5.23)$$

Kvadriranjem izraza u uglatoj zagradi, dobivamo

$$\dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \dot{x}_2(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon x_0^2(t) + 2\varepsilon^2 x_1(t)x_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (5.24)$$

Te ako sada prebacimo sve članove na lijevu stranu, i izjednačimo sa članovima sa istim potencijama parametra  $\varepsilon$ , dobivamo

$$[\dot{x}_0(t) - x_0(t)] + [\dot{x}_1(t) - x_1(t) - x_0^2(t)] + \varepsilon^2 [\dot{x}_2(t) - x_2(t) - 2x_1(t)x_0(t)] = \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (5.25)$$

Ako zanemarimo članove višeg reda  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ , prethodni izraz će biti zadovoljen, kada su članovi u uglatim zagradama jednaki nula.

$$\dot{x}_0(t) = x_0(t), \quad (5.26)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_0^2(t), \quad (5.27)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) + 2x_1(t)x_0. \quad (5.28)$$

Određivanje nepoznatih funkcija  $x_0(t), x_1(t), x_2(t)$  svedeno je na rješavanje sustava od tri

nehomogene linearne vremenski varijabilne diferencijalne jednadžbe. S obzirom da početni uvjet  $x(0) = x_0$  vrijedi za bilo koji  $\varepsilon$ , slijedi da u  $t = 0$  imamo  $x_0(0) = x_0, x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$ . Sada možemo naći rješenje jednadžbe (5.26), te u konačnici rješenje neperturbiranog sustava (5.21)

$$x_0(t) = x_0 e^t. \quad (5.29)$$

Uvrštavanjem (5.29) u (5.27) dobivamo jednadžbu

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_0^2 e^{2t}, \quad x_1(0) = 0, \quad (5.30)$$

čije rješenje je

$$x_1(t) = x_0^2 e^t (e^t - 1). \quad (5.31)$$

Uvrštavanjem rješenja  $x_0(t), x_1(t)$  u (5.28) dobivamo slijedeću jednadžbu

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) + 2x_0^3 e^{2t} (e^t - 1), \quad x_2(0) = 0, \quad (5.32)$$

čije rješenje je

$$x_2(t) = x_0^3 e^t (e^t - 1)^2. \quad (5.33)$$

Na kraju, uvrštavanjem prethodno dobivenih rješenja u (5.22), dobivamo asimptotsko rješenje drugog reda

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) e^t [1 + \varepsilon x_0 (e^t - 1) + x_0^3 e^t (e^t - 1)^2] + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (5.34)$$

Rješenje možemo prikazati u konciznije obliku

$$x(t) = \frac{x_0 e^t}{1 - \varepsilon x_0 (e^t - 1)}. \quad (5.35)$$

Razvojem navedenog rješenja u Taylorov red do drugog reda, dobivamo upravo razvoj (5.34). Navedena aproksimacija vrijedi za vremenske intervale koji su manji od  $t_f = \ln \left( \frac{1+\varepsilon x_0}{\varepsilon x_0} \right)$ .

## 5.2 He'ova perturbacijska metoda homotopije

U slijedećem potpoglavlju, pokazat ćemo glavne točke He'ove perturbacijske metode homotopije [7]. Te ćemo ujedno pokazati koliko je perturbacijska metoda homotopije moćan alat u rješavanju nelinearnih problema u matematici, fizici i inženjerstvu.

Kako bismo objasnili glavnu ideju PMH za rješavanje nelinearnih diferencijalnih jednadžbi, razmotrit ćemo slijedeću nelinearnu diferencijalnu jednadžbu

$$\mathcal{A}(u(\tau)) - f(\tau) = 0, \quad \tau \in \Omega, \quad (5.36)$$

uz rubne uvjete

$$\mathcal{B} \left( u, \frac{\partial u}{\partial n} \right) = 0, \quad \tau \in \Gamma, \quad (5.37)$$

gdje je  $\mathcal{A}$  poopćeni diferencijalni operator,  $\mathcal{B}$  je rubni operator,  $f(\tau)$  je poznata analitička funkcija,  $\Gamma$  je granica domene  $\Omega$ , a  $\frac{\partial u}{\partial n}$  je diferencijal po normalu izvan domene  $\Omega$ .

Operator  $\mathcal{A}(\cdot)$  se može razdvojiti na dva dijela, linearni dio  $\mathcal{L}$  i nelinearni operator  $\mathcal{N}$ . Stoga (5.36) možemo napisati kao

$$\mathcal{L}(u(\tau)) + \mathcal{N}(u(\tau)) - f(\tau) = 0. \quad (5.38)$$

Sada ćemo konstruirati slijedeću homotopiju<sup>1</sup>,  $v(\tau, p) : \Omega \times [0, 1]$  koja zadovoljava

$$\mathcal{H}(v, p) = (1 - p) [\mathcal{L}(v) - \mathcal{L}(u_0)] + p [\mathcal{A}(v) - f(\tau)] = 0, \quad (5.39)$$

---

<sup>1</sup>U topologiji, dvije kontinuirane funkcije iz jednog topološkog prostora u drugi su homotopske, ako i samo ako se mogu deformirati jedna u drugu.



što je ekvivalentno sljedećem zapisu

$$\mathcal{H}(v, p) = [\mathcal{L}(v) - \mathcal{L}(u_0) + p\mathcal{L}(u_0) + p[\mathcal{N}(v) - f(\tau)] = 0, \quad (5.40)$$

gdje je  $p \in [0, 1]$  ugradbeni parametar, a  $u_0$  je početna estimacija (5.36), koja zadovoljava rubne uvjete. Slijedi iz (5.39) da je

$$\mathcal{H}(v, 0) = \mathcal{L}(v) - \mathcal{L}(u_0) = 0, \quad (5.41)$$

$$\mathcal{H}(v, 1) = \mathcal{A}(v) - f(\tau) = 0. \quad (5.42)$$

Mijenjajući parametar  $p$  od nula do jedan, mijenjamo rješenje od  $u_0(\tau)$  do  $u(\tau)$ . U topologiji, taj proces se naziva deformacija funkcija, a  $\mathcal{L}(v) - \mathcal{L}(u_0)$ ,  $\mathcal{A}(v) - f(\tau)$  homotopske. Ovdje ugradbeni parametar  $p$  koristimo kao mali parametar, i pretpostavljamo da je rješenje jednadžbe (5.40) prikazano kao razvoj u red po potencijama parametra  $p$

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots; \quad (5.43)$$

postavljajući  $p = 1$ , dobivamo aproksimaciju rješenja jednadžbe (5.36) kao

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots, \quad (5.44)$$

što upravo predstavlja suštinu perturbacijske metode homotopije. Red (5.44) konvergira u većini slučajeva, dok brzina konvergencije ovisi o  $\mathcal{L}(v)$ .

Uvedimo sada sljedeće teoreme [5].

**Teorem 5.1.** *Pretpostavimo da je  $\mathcal{N}(v)$  nelinearna funkcija, i da je  $v = \sum_{k=0}^{\infty} p^k v_k$ , tada slijedi*

$$\frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N}(v)_{p=0} = \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^{\infty} p^k v_k \right)_{p=0} = \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^n p^k v_k \right)_{p=0}. \quad (5.45)$$

*Dokaz.* S obzirom da vrijedi

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} p^k v_k = \sum_{k=0}^n p^k v_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} p^k v_k, \quad (5.46)$$

slijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N}(v)_{p=0} &= \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^{\infty} p^k v_k \right)_{p=0} = \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^n p^k v_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} p^k v_k \right)_{p=0} \\ &= \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^n p^k v_k \right)_{p=0}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Stoga dobivamo

$$\frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N}(v)_{p=0} = \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^{\infty} p^k v_k \right)_{p=0} = \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^n p^k v_k \right)_{p=0}. \quad (5.48)$$

Raspišemo li sada  $\mathcal{N}(v)$  u McLaurinov red po potencijama parametra  $p$ , dobivamo

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(v) &= \mathcal{N}(v)_{p=0} + \left( \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{N}(v)_{p=0} \right) p + \left( \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \mathcal{N}(v)_{p=0} \right) p^2 + \\ &+ \left( \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial p^3} \mathcal{N}(v)_{p=0} \right) p^3 + \dots + \left( \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N}(v)_{p=0} \right) p^n + \dots \end{aligned} \quad (5.49)$$

Substitucijom (5.43) u prethodnu jednadžbu, dobivamo

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(v) &= \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^{\infty} p^k v_k \right)_{p=0} + \left( \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^{\infty} p^k v_k \right)_{p=0} \right) p + \left( \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^{\infty} p^k v_k \right)_{p=0} \right) p^2 + \\ &+ \dots + \left( \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^{\infty} p^k v_k \right)_{p=0} \right) p^n + \dots \end{aligned} \quad (5.50)$$

Prema teoremu (5.1), slijedi

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(v) = \mathcal{N}(v_0) + & \left( \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^1 p^k v_k \right) \right)_{p=0} p + \left( \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^2 p^k v_k \right) \right)_{p=0} p^2 + \\ & + \dots + \left( \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^n p^k v_k \right) \right)_{p=0} p^n + \dots \end{aligned} \quad (5.51)$$

Substituirajući (5.43) i (5.51) u (??), i izjednačavanjem izraza s istim potencijama parametra  $p$ , dobivamo

$$\begin{aligned} p^0 : v_0(\tau) &= f(\tau), \\ p^1 : v_1(\tau) &= \mathcal{N}(v_0), \\ p^2 : v_2(\tau) &= \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^1 p^k v_k \right)_{p=0}, \\ p^3 : v_3(\tau) &= \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^2 p^k v_k \right)_{p=0}, \\ &\vdots \\ p^{n+1} : v_{n+1}(\tau) &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^n p^k v_k \right)_{p=0}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Prethodnom substitucijom i izjednačavanjem po potencijama paramtera  $p$ , definirali smo tzv. *He'ove polinome*, tj.

$$H_n(v_0, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^n p^k v_k \right)_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.53)$$

Te konačno, aproksimativno rješenje dobivenom PMH izražavamo u slijedećem obliku

$$u(\tau) = \mathcal{L}^{-1} \left[ (\tau) + \sum_{k=0}^{\infty} H_n(v_0, \dots, v_n) \right]. \quad (5.54)$$

■

## Analiza konvergencije He'ove perturbacijske metode homotopije

Razmotrimo diferencijalnu jednadžbu (5.36) u slijedećem obliku

$$u(\tau) = \mathcal{F}(u(\tau)), \quad (5.55)$$

gdje je  $\mathcal{F}$  nelinearni operator iz Hilbertovog prostora  $H$  u  $H$ ,  $f$  je funkcija u  $H$ , te tražimo  $u(\tau)$  koji zadovoljava (5.55). PHM je ekvivalentno određivanju niza

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n, \quad (5.56)$$

služeći se iterativnim postupkom

$$S_{n+1} = \mathcal{F}(S_n), \quad (5.57)$$

povezanim sa jednadžbom

$$S = \mathcal{F}(S). \quad (5.58)$$

**Teorem 5.2.** [14] *Neka je  $\mathcal{F}$  operator iz Hilbertovog prostora  $H$  u  $H$ , i neka je  $u$  rješenje jednadžbe (5.55). Tada niz  $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$  definiran sa (5.54) konvergira, ako  $\exists 0 \leq \alpha < 1$ ,  $\|v_{k+1}\| \leq \alpha \|v_k\|$ ,  $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .*

*Dokaz.* Sada ćemo pokazati da je  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$  Cauchyev niz u Hilbertovom prostoru  $H$ .

Zbog ovog razloga, razmotrimo

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \|v_{n+1}\| \leq \alpha \|v_n\| \leq \alpha^2 \|v_{n-1}\| \leq \dots \leq \alpha^{n+1} \|v_0\|. \quad (5.59)$$

Međutim za svaki  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq n$ , imamo  $\|S_n - S_m\| = \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \dots + (S_{m+1} - S_m)\| \leq \|S_n - S_{n-1}\| + \|S_{n-1} - S_{n-2}\| + \dots + \|S_{m+1} - S_m\| \leq \alpha^n \|v_0\| + \alpha^{n+1} \|v_0\| + \dots + \alpha^{m+1} \|v_0\| \leq (\alpha^{m+1} + \alpha^{m+2} + \dots) \|v_0\| = \frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} \|v_0\|$ , stoga vrijedi da je  $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|S_n - S_m\| =$

0, tj.  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$  je Cauchyev niz u Hilbertovom prostoru  $H$ , te implicira da

$$\exists S, S \in H, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad (5.60)$$

tj.  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty} v_n$ . Rješavanje jednadžbe (5.55) je ekvivalentno rješavanju (5.58), to implicira, da ako je  $\mathcal{F}$  kontinuirani operator, slijedi

$$\mathcal{F}(S) = \mathcal{F}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = S, \quad (5.61)$$

te smo dokazali da je  $S$  rješenje jednadžbe (5.55). ■

**Definicija 5.1.** Za svaki  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  definiramo

$$\alpha_k \begin{cases} \frac{\|v_{k+1}\|}{\|v_k\|}, & \|v_k\| \neq 0, \\ 0 & \|v_k\| = 0. \end{cases} \quad (5.62)$$

**Korolar 5.1.** U teoremu (5.2), niz  $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ , definiranom u jednadžbi (5.54), konvergira kada je  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

**Teorem 5.3.** Ako je niz  $u(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\tau)$ , definiran u jednadžbi (5.54) konvergentan, tada je  $u(\tau)$  rješenje nelinearne jednadžbe (5.36).

*Dokaz.* Pretpostavimo da niz  $\psi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\tau)$  konvergira, te na osnovu (5.54) imamo

$$\psi(\tau) = - \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{N} \left( \sum_{k=0}^n p^k v_k \right)_{p=0} - f(\tau) \right). \quad (5.63)$$

Substituirajući  $p = 1$ , te primjenom operatora  $\mathcal{L} = \frac{d^m}{d\tau^m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , na obje strane jednadžbe (5.63), te koristeći Leibnitzovo pravilo, dobivamo

$$\mathcal{L}[\psi(\tau)] = -\mathcal{N}[\psi(\tau)] + f(\tau), \quad (5.64)$$

tj.

$$\mathcal{L}[\psi(\tau)] + \mathcal{N}[\psi(\tau)] = f(\tau). \quad (5.65)$$

Stoga, možemo utvrditi da je niz  $\psi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\tau)$  rješenje nelinearne diferencijalne jednačbe (5.36), te je time dokaz teorema (5.3) završen. ■

## 5.3 Primjena He'ove perturbacijske metode homotopije

U ovom dijelu, pokazat ćemo na nekoliko različitih primjera, koliko je perturbacijska metoda homotopije moćan matematički alat u rješavanju linearnih i nelinearnih problema.

**Primjer 5.2.** [4] *Razmotrimo sustav diferencijalnih jednačbi sa danim početnim uvjetima*  
 $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_3(0) = 2$

$$\Theta_s = \begin{cases} \dot{y}_1 = y_3 - \cos(t), \\ \dot{y}_2 = y_3 - e^t, \\ \dot{y}_3 = y_1 - y_2. \end{cases} \quad (5.66)$$

*Na osnovu jednačbe (5.43), slijedi*

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{1,0} + pv_{1,1} + p^2v_{1,2} + \dots; \\ v_2 &= v_{2,0} + pv_{2,1} + p^2v_{2,2} + \dots; \\ v_3 &= v_{3,0} + pv_{3,1} + p^2v_{3,2} + \dots; \end{aligned} \quad (5.67)$$

gdje su  $v_{i,j}$   $i, j = 1, 2, 3, \dots$  neodređene funkcije. Stoga na osnovu jednadžbe (5.44), slijedi

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \lim_{p \rightarrow 1} v_1(t) = \sum_{k=0}^2 v_{1,k}(t), \\ y_2(t) &= \lim_{p \rightarrow 1} v_2(t) = \sum_{k=0}^2 v_{2,k}(t), \\ y_3(t) &= \lim_{p \rightarrow 1} v_3(t) = \sum_{k=0}^2 v_{3,k}(t). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Na osnovnu prethodnog poglavlja, konstruirat ćemo slijedeću homotopiju za sustav  $\Omega_s$ ,

$$\begin{aligned} H_1(v, p) &= (1-p)(\dot{v}_1 - v_3 - \dot{u}_{1,0}) + p(\dot{v}_1 - v_3 + \cos(t)) = 0, \\ H_2(v, p) &= (1-p)(\dot{v}_2 - v_3 - \dot{u}_{2,0}) + p(\dot{v}_2 - v_3 + e^t) = 0, \\ H_3(v, p) &= (1-p)(\dot{v}_3 - \dot{u}_{3,0}) + p(\dot{v}_3 - v_1 + v_2) = 0, \end{aligned} \quad (5.69)$$

sa slijedećim početnim aproksimacijama

$$\begin{aligned} v_{1,0}(0) &= y_1(0) = 1, \\ v_{2,0}(0) &= y_2(0) = 0, \\ v_{3,0}(0) &= y_3(0) = 2. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Substituirajući jednadžbu (5.67) i (5.70) u jednadžbu (5.69), prema potencijama ugradbenog parametra  $p$ , dobivamo

$$\begin{aligned} (\dot{v}_{1,0} - v_{3,0}) + p(\dot{v}_{1,1} + \cos(t) - v_{3,1}) + p^2(\dot{v}_{1,2} - v_{3,2}) + \dots &= 0, \\ (\dot{v}_{2,0} - v_{3,0}) + p(\dot{v}_{2,1} + e^t - v_{3,1}) + p^2(\dot{v}_{2,2} - v_{3,2}) + \dots &= 0, \\ (\dot{v}_{3,0}) + p(\dot{v}_{3,1} + v_{2,0} - v_{1,0}) + p^2(v_{3,2} + v_{2,1} - v_{1,1}) + \dots &= 0. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Kako bismo odredili neodređene funkcije  $v_{i,j}$   $i, j = 1, 2, 3, \dots$ , moramo riješiti slijedeći sustav

od devet enačb

$$\dot{v}_{1,0} - v_{3,0} = 0, \quad (5.72)$$

$$\dot{v}_{1,1} + \cos(t) - v_{3,1} = 0, \quad (5.73)$$

$$\dot{v}_{1,2} - v_{3,2} = 0, \quad (5.74)$$

$$\dot{v}_{2,0} - v_{3,0} = 0, \quad (5.75)$$

$$\dot{v}_{2,1} + e^t - v_{3,1} = 0, \quad (5.76)$$

$$\dot{v}_{2,2} - v_{3,2} = 0, \quad (5.77)$$

$$\dot{v}_{3,0} = 0, \quad (5.78)$$

$$\dot{v}_{3,1} + v_{2,0} - v_{1,0} = 0, \quad (5.79)$$

$$\dot{v}_{3,2} + v_{2,1} - v_{1,1} = 0. \quad (5.80)$$



Stoga,

$$v_{1,0}(t) = 2t + 1, \quad (5.81)$$

$$v_{1,1}(t) = -\sin(t) + \frac{1}{2}t^t, \quad (5.82)$$

$$v_{1,2}(t) = \sin(t) + e^t - \frac{1}{2}t^2 - 2t - 1, \quad (5.83)$$

$$v_{2,0}(t) = 2t, \quad (5.84)$$

$$v_{2,1}(t) = -e^t + \frac{1}{2}t^2 + 1, \quad (5.85)$$

$$v_{2,2}(t) = \sin(t) + e^t - \frac{1}{2}t^2 - 2t - 1, \quad (5.86)$$

$$v_{3,0}(t) = 2, \quad (5.87)$$

$$v_{3,1}(t) = t, \quad (5.88)$$

$$v_{3,2}(t) = \cos(t) + e^{-t} - 2. \quad (5.89)$$

Iz jednadžbe (5.68), slijedi

$$y_1(t) = e^t, \quad (5.90)$$

$$y_2(t) = \sin(t), \quad (5.91)$$

$$y_3(t) = \cos(t) + e^t. \quad (5.92)$$

Rješenja dobivena perturbacijskom metodom homotopije, u potpunosti odgovaraju analitičkom rješenju sustava  $\Omega_s$ .

U slijedećem primjeru ćemo pokazati da perturbacijska metoda homotopije, jednako dobro aproksimira rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

**Primjer 5.3.** [2] Razmotrimo slijedeću linearnu homogenu jednadžbu difuzije

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0. \quad (5.93)$$

Rubni uvjeti su dani sljedećim izrazima

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0. \quad (5.94)$$

Početni uvjet dan je sljedećim izrazom

$$u(x, 0) = \sin(x). \quad (5.95)$$

Kao i u prethodnom primjeru, sada ćemo konstruirati homotopiju  $H(v, p) : \Omega \times [0, 1]$  za jednadžbu (5.93)

$$H(v, p) = (1 - p) \left( \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v_0}{\partial t} \right) + p \left( \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \right) = 0. \quad (5.96)$$

Pretpostavimo da se rješenje prethodno definirane homotopije, može prikazati kao razvoj po potencijama ugradbenog parametra  $p$ , stoga slijedi

$$\begin{aligned} H(v, p) = & (1 - p) \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} + p \frac{\partial v_1}{\partial t} + p^2 \frac{\partial v_2}{\partial t} + p^3 \frac{\partial v_3}{\partial t} + \dots - \frac{\partial v_0}{\partial t} \right) \\ & + p \left( \begin{aligned} & \frac{\partial v_0}{\partial t} + p \frac{\partial v_1}{\partial t} + p^2 \frac{\partial v_2}{\partial t} + \dots \\ & - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - p \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - p^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \dots \\ & + v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots \end{aligned} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Ako usporedimo članove prethodnog izraza po potencijama ugradbenog parametra  $p$ , dobivamo

$$\begin{aligned} p^0 : & \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial v_0}{\partial t} = 0, \\ p^1 : & \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + v_0 = 0, \\ p^2 : & \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + v_1 = 0, \\ & \vdots \end{aligned} \quad (5.98)$$

Rješavanjem prethodno dobivenih jednažbi, dobivamo

$$v_0(x, t) = \sin(x), \quad (5.99)$$

$$v_1(x, t) = -2t \sin(x), \quad (5.100)$$

$$v_2(x, t) = \frac{(2t^2)}{2} \sin(x). \quad (5.101)$$

Rješenje jednažbe (5.93) možemo napisati u slijedećem obliku

$$u(x, t) = v_0 + v_1 + v_2 + \dots = \sin(x) \left( 1 - 2t + \frac{(2t)^2}{2!} - \frac{(2t)^3}{3!} + \dots \right). \quad (5.102)$$

Ako rješenje zapišemo u konciznijem obliku dobivamo

$$u(x, t) = e^{-2t} \sin(x). \quad (5.103)$$

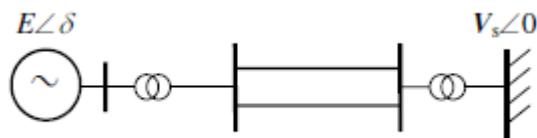
Rješenje jednažbe (5.93) dobiveno perturbacijskom metodom homotopije, u potpunosti odgovara analitičkom rješenju.

# Sinteza algoritma za upravljanje Hamiltonskim sustavima

U energetske sustavima, oblikovanje energije sustava obično se postiže modificiranjem obrazca prijenosa energije između mehaničkog i električnog sustava. Konvencionalni IDA-PBC upravljački algoritam ne može direktno rasporediti prigušivanje u mehaničkom sustavu. Stoga, pažljivim odabirom matrice unutarnjih strukturnih veza, te zatim rješavanjem dane parcijalne diferencijalne jednačbe perturbacijskom metodom homotopije, možemo poboljšati performanse IDA-PBC upravljačkog algoritma.

## 6.1 O energetske sustavima

Razmotrimo slijedeći model sinkronog generatora sa slike 6.1. Nelinearni dinamički model



Slika 6.1: Schema sinkronog generatora

sinkronog generatora [12] možemo prikazati u slijedećem obliku

$$\Psi_s = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -b_1 x_3 \sin(x_1) - b_2 x_2 + P, \\ \dot{x}_3 = b_3 \cos(x_1) - b_4 x_3 + E + u. \end{cases} \quad (6.1)$$

gdje je  $x_1$  kut snage generatora u radijanima [rad];  $x_2$  devijacija kutne brzine rotora generatora;  $x_3$  je unutarnji prijelazni napon q-osi, po jedinici;  $u$  je napon polja električnog kruga generatora tj. upravljački ulaz, po jedinici. Koeficijenti  $b_i, i = 1, \dots, 4$  su pozitivni,  $P$  je mehanička snaga, te ćemo pretpostaviti da je ona konstantna po jedinici, dok je  $E$  napon beskonačnog čvora u mreži, po jedinici.

Uzevši u obzir fizikalna ograničenja sustava, ograničimo rad sustava u slijedećem zatvorenom skupu

$$\mathcal{D}_\delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2} - \delta_1, \quad \delta_2 \leq x_3\}, \quad (6.2)$$

gdje su  $\delta_1$  i  $\delta_2$ , neki mali pozitivni brojevi.

Ravnotežno stanje otvorenog kruga sustava  $\Psi_s$  je  $\mathbf{x} = [x_1 \ 0 \ x_3]^T$ , gdje su  $x_1$  i  $x_3$  rješenja

$$E = b_4 x_3 - b_3 \cos(x_1), \quad P = b_1 x_3 \sin(x_1). \quad (6.3)$$

Odmah je uočljivo, da je nužan uvjet za postojanje ravnotežnog stanja  $E \geq \frac{b_4 P}{b_1} - b_3$ . Ako je nejednakost zadovoljena, tada postoji asimptotski stabilno ravnotežno stanje u zatvorenom skupu  $\mathcal{D}_\delta$ , koje ćemo označavati subindeksom  $(\cdot)_*$ , tj.  $\mathbf{x}_* = [x_{1*} \ 0 \ x_{3*}]^T$ , te kako bismo dali do znanja da je upravo željeno ravnotežno stanje, glavni cilj stabilizacije sustava.

## Domena atrakcije otvorenog kruga sustava

Poznato je iz [12], da je ravnotežno stanje  $\mathbf{x}_*$  modela  $\Psi_s$ , lokalno stabilno sa Lyapunovljevom funkcijom

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_2^2 + b_1x_3(\cos(x_{1*}) - \cos(x_1)) - P\tilde{x}_1 + \frac{b_1b_4}{2b_3}\tilde{x}_3^2, \quad (6.4)$$

gdje smo definirali  $\tilde{x}_i \triangleq x_i - x_{i*}$ ,  $i = 1, 3$ .  $\mathcal{H}(\mathbf{x}_*) = 0$  i  $\mathcal{H}$  ima izolirani minimum u  $x_*$ , te je pozitivno definitna funkcija u okolišu  $x_*$ . Nadalje, derivacija uzduž trajektorije sustava  $\Psi_s$ , uz  $u = 0$  je nepozitivna. Kako bismo postigli asimptotsku stabilnost sustava, pozivamo se na La Salleov princip invarijantnosti. Moramo isto tako napomenuti da princip invarijantnosti iziskuje da su sve trajektorije ograničene, te da ostaju unutar skupa gdje je  $\dot{\mathcal{H}} \leq 0$ . U običajenim primjenama ovog teorema, navedena dva postulata su zadovoljena, jedino ako postoji invarijantni kompaktan skup, koji je obično podnivo skupa Lyapunovljeve funkcije, tj.  $\Omega_c \triangleq \{\mathbf{x} | \mathcal{H}(\mathbf{x}) \leq c\}$ . Ograničenost takvih skupova se dokazuje potvrdom da je sam Hamiltonian radijalno neograničen. U našem slučaju, Hamiltonian nije radijalno neograničen, te možemo osigurati da je  $\Omega_c$  ograničen za dovoljno mali  $c$ . Stoga, najbolja moguća estimacija domene atrakcije je dana sa  $\Omega_c$  sa najvećim mogućim  $c$ , takvim da je povezani podskup sa ravnotežnim stanjem ograničen.

U pogledu prethodne diskusije, provedena je konciznija analiza, kako bismo utvrdili  $\mathcal{R}$ . Na osnovnu [3] dolazimo do svojstva konveksnosti navedenog Hamiltoniana.

**Propozicija 6.1.** *Definirajmo mali  $\delta > 0$ . Estimacija domene atrakcije stabilnog ravnotežnog stanja  $\mathbf{x}_*$  sustava  $\Psi_s$  su podnivoi  $\Omega_c$  koji su sadržani u  $\varphi_\varepsilon \cap \mathcal{D}_\delta$ , gdje je*

$$\varphi_\varepsilon \triangleq \left\{ \mathbf{x} \left| \left( \frac{b_1b_4}{b_3} - \varepsilon \right) x_3 > \frac{1}{\cos(x_1)} \left( b_1 \sin^2(x_1) + \frac{\varepsilon}{b_1} \right) \right. \right\}, \quad (6.5)$$

za svaki  $0 < \varepsilon < \min\{\frac{b_1b_4}{b_3}, 1, b_1\delta \cos(\frac{\pi}{2} - \delta)\}$ .

*Dokaz.* Dokaz slijedi direktno iz činjenice da je Hamiltonian snažno konveksna funkcija na  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$ , tj.  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{H}_d(\mathbf{x}) > \varepsilon I$ , za neki  $\varepsilon > 0$  i  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ . Tada su podnivoi Hamiltoniana ograničeni. ■

Snažna konveksnost je dovoljan, ali ne i nužan uvjet za ograničenost podnivoa Hamiltoniana. Određivanje najvećeg zatvorenog podnivoa ne snažno konveksne Lyapunovljeve funkcije, te određivanje njezine veze sa granicom prave domene atrakcije je izuzetno kompleksan problem, pogotovo, ako je riječ o nekonzervativnim sustavima. U provedenoj sintezi algoritma upravljanja, konstruirat ćemo Lyapunovljevu funkciju za zatvoreni krug sustava, koja je snažno konveksna na čitavom skupu  $\mathcal{D}_\delta$ .

## 6.2 Sinteza IDA-PBC algoritma upravljanja primjenom He'ove perturbacijske metode homotopije

Sinteza algoritma upravljanja za sustav  $\Psi_s$  provedena je na osnovi IDA-PBC formalizma prema [11]. Kao što smo naveli u prethodnom poglavlju, navedeni pristup bitno otežava činjenica, da bismo definirali upravljački zakon, potrebno je riješiti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu. Međutim, kako bismo uopće proveli sintezu algoritma upravljanja, potrebno je sustav  $\Psi_s$  prebaciti u port-controlled Hamiltonski oblik, tj.

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathcal{J} - \mathcal{R}] \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}u, \quad (6.6)$$

gdje je  $\mathcal{J} = -\mathcal{J}^T$ ,  $\mathcal{R} = \mathcal{R}^T \geq \mathbf{0}$ , a  $\mathbf{g}$  ulazni vektor, tj.

$$\mathcal{J} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_3}{b_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Stabilizaciju sustava primjeno IDA-PBC algoritma postizemo ciljaajući dinamiku zatvorenog kruga u slijedećem obliku

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathcal{J}_d - \mathcal{R}_d] \frac{\partial \mathcal{H}_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \quad (6.8)$$

gdje  $\mathcal{H}_d(\mathbf{x})$  željena totalna energija sustava, koja ima minimum u željenom stanju  $\mathbf{x}_*$ , a  $\mathcal{J}_d = -\mathcal{J}_d^T$ ,  $\mathcal{R}_d = \mathcal{R}_d^T \geq \mathbf{0}$ , je željena matrica unutarnjih strukturnih veza i željena disipacijska matrica.

Opišimo sada navedeni izbor željenih matrica  $\mathcal{J}_d, \mathcal{R}_d$ . Ubrizgavanje prigušenja (engl. *damping injection*) u električnu varijablu stanja  $x_3$  lako postizemo povratnom vezom na  $\frac{\partial \mathcal{H}_d}{\partial x_3}$ . Isto tako, primjetimo da je prigušenje mehaničkih varijabli stanja  $x_1, x_2$  slabo, s obzirom da je parametar  $b_2$  obično malen. Nadalje, s obzirom da matrica  $\mathcal{J}$  ne sadrži unutarnju vezu između električne i mehaničke dinamike, propagacija prigušenja u mehaničke varijable stanje, daleka je od očitog. Stoga predlažemo slijedeće matrice veza unutarnjih stanja i disipacija

$$\mathcal{J}_d \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_d \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_3}{b_1} + k_v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

gdje je  $k_v \geq 0$ , a  $\alpha$  pojačanje koje je potrebno odrediti.

**Propozicija 6.2.** *Razmotrimo sustav  $\Psi_s$  u zatvorenoj petlji, sa upravljačkim zakonom*

$$u = -\alpha x_2 + \left(-\frac{b_3}{b_1} - k_v\right) \left(\gamma x_1 - b_1 \cos(x_1) + \frac{\gamma}{\alpha} x_3\right) - b_3 \cos(x_1) + b_4 x_3 - E, \quad (6.10)$$

gdje je pojačanje  $k_v \geq 0$ , a slijedeći uvjeti moraju biti zadovoljeni

$$\alpha = \frac{\gamma P}{\mu} \quad (6.11)$$

$$\eta > 0$$

gdje je

$$\begin{aligned} \mu &= b_1(\gamma x_{1*} - b_1 \cos(x_{1*})) \sin(x_{1*}), \\ \eta &= -\frac{b_1}{\alpha}(\alpha b_1 \sin^2(x_{1*}) + \gamma \alpha \sin(x_{1*}) - \gamma x_{3*} \cos(x_{1*})) > 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Tada sustav u zatvorenoj petlji poprima oblik (6.8), (6.9) i

- $\mathbf{x}_*$  je jedinstveno ravnotežno stanje u  $\mathcal{D}_\delta$ ,



- $\mathbf{x}_*$  je asimptotski stabilno sa Lyapunovljevom funkcijom  $\mathcal{H}_d(\mathbf{x})$ ,
- Estimacije domene atrakcije su podnivoi  $\Omega_c^d \triangleq \{\mathbf{x} | \mathcal{H}_d(\mathbf{x}) \leq c\}$  koji su sadržani u  $\mathcal{D}_\delta$ .

Gdje je željeni Hamiltonian

$$\mathcal{H}_d(\mathbf{x}) = \frac{\alpha\gamma}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{\gamma}{2\alpha}x_3^2 + \gamma x_1 x_3 - \alpha b_1 \sin(x_1) - b_1 x_3 \cos(x_1). \quad (6.13)$$

*Dokaz.* Pretpostavimo za početak da želimo naći upravljački zakon  $u = \beta(\mathbf{x})$ , koji će omogućiti da nelinearni afini sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (6.14)$$

poprimi PCH oblik

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathcal{J}_d - \mathcal{R}_d] \frac{\partial \mathcal{H}_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \quad (6.15)$$

Pretpostavimo da je  $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})$  lijevi anihilator punog ranga od  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , odnosno da vrijedi

$$\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.16)$$

Pomnožimo li jednadžbe (6.14) i (6.15) sa  $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})$  i međusobno usporedimo, dobivamo

$$\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})[\mathcal{J}_d - \mathcal{R}_d] \frac{\partial \mathcal{H}_d}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}), \quad (6.17)$$

Uzevši u obzir prethodno definirane matrice  $\mathcal{J}_d$ ,  $\mathcal{R}_d$  te definiranjem lijevog anihilatora  $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x}) = [1 \ 1 \ 0]$ , dobivamo slijedeću parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial \mathcal{H}_d}{\partial x_1} + (b_2 - 1) \frac{\partial \mathcal{H}_d}{\partial x_2} - \alpha \frac{\partial \mathcal{H}_d}{\partial x_3} = b_1 x_3 \sin(x_1) + x_2(b_2 - 1) - P. \quad (6.18)$$

Kao što smo ustanovili u prethodnim poglavljima, rješavanje parcijalne diferencijalne jednadžbe, nije jednostavan problem. Kako bismo dobili rješenje prethodno definirane parcijalne diferencijalne jednadžbe upotrijebiti ćemo perutrbacijsku metodu homotopije, te pokazati efi-

kasnost navedenog matematičkog alata.

S obzirom da nemamo definirane početne i rubne uvjete za navedenu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu, potrebno je modificirati homotopiju, konstruiranu u prethodnim poglavljima.

Sada ćemo konstruirati modificiranu konveksnu homotopiju  $\mathcal{H}(u, p) : \Omega \times [0, 1]$  za jednadžbu (6.18)

$$\mathcal{H}(u, p) = \frac{\partial u}{\partial x_1} + (1 - b_2)x_2 + P + p \left( (b_2 - 1) \frac{\partial u}{\partial x_2} - \alpha \frac{\partial u}{\partial x_3} - b_1 x_3 \sin(x_1) \right), \quad (6.19)$$

te ako razvijemo  $u$  u red po potencijama ugradbenog parametra  $p$

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots; \quad (6.20)$$

dobivamo slijedeće parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$\begin{aligned} p^0 : \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + (1 - b_2)x_2 + P &= 0, \\ p^1 : \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (b_2 - 1) \frac{\partial u_0}{\partial x_2} - \alpha \frac{\partial u_0}{\partial x_3} - b_1 x_3 \sin(x_1) &= 0, \\ p^2 : \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + (b_2 - 1) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \alpha \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= 0, \\ p^3 : \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + (b_2 - 1) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \alpha \frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Primjetimo kako smo uz pomoć perturbacijske metode homotopije, početni netrivialan problem, sveli na četiri jednostavne parcijalne diferencijalne jednadžbe, čija su partikularna

rješenja

$$u_0 = [x_2(b_2 - 1) - P] x_1, \quad (6.22)$$

$$u_1 = \left( b_2 - \frac{b_2^2}{2} - \frac{1}{2} \right) x_1^2 - b_1 x_3 \cos(x_1), \quad (6.23)$$

$$u_2 = -\alpha b_1 \sin(x_1) \quad (6.24)$$

$$u_3 = 0. \quad (6.25)$$

Uvrstimo li prethodno dobivena partikularna rješenja u (6.20) dobivamo konačno rješenje

$$\mathcal{H}_d(\mathbf{x}) = \left( b_2 - \frac{b_2^2}{2} - \frac{1}{2} \right) x_1^2 + [x_2(b_2 - 1) - P] x_1 - \alpha b_1 \sin(x_1) - b_1 x_3 \cos(x_1) + \Psi(\mathbf{x}), \quad (6.26)$$

gdje je  $\Psi(\mathbf{x})$  diferencijabilna funkcija, koja mora zadovoljiti slijedeću homogenu parcijalnu diferencijalnu jednažbu

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + (b_2 - 1) \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} - \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = 0, \quad (6.27)$$

čije je rješenje u slijedećem obliku

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(x_1(1 - b_2) + x_2, \alpha x_1 + x_3). \quad (6.28)$$

Navedenu funkciju je potrebno definirati kako bi  $\mathcal{H}_d(\mathbf{x})$  imao izolirani minimum u  $\mathbf{x}_*$ . Stoga smo  $\Psi(x_1(1 - b_2) + y, \alpha x_1 + x_3)$  definirali na slijedeći način

$$\Psi(x_1(1 - b_2) + y, \alpha x_1 + x_3) = \frac{1}{2}(x_1(1 - b_2) + x_2)^2 + \frac{\gamma}{2\alpha}(\alpha x_1 + x_3)^2, \quad (6.29)$$

te navedeni željeni Hamiltonian glasi

$$\mathcal{H}_d(\mathbf{x}) = \frac{\alpha\gamma}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{\gamma}{2\alpha}x_3^2 + \gamma x_1 x_3 - \alpha b_1 \sin(x_1) - b_1 x_3 \cos(x_1). \quad (6.30)$$

Izabrali smo navedenu funkciju, kako bismo anulirali sedlaste funkcije u  $\mathcal{H}_d(\mathbf{x})$ , te pojačali konveksnost po svim varijablama stanja. S obzirom da je cilj navedenog formalizma stabilizacija sustava u željenom ravnotežnom stanju  $\mathbf{x}_*$ , potrebno je zadovoljiti uvjet da je  $\left. \frac{\partial \mathcal{H}_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_*)} = 0$ , tj. da  $\mathcal{H}_d(\mathbf{x})$  ima minimum u  $\mathbf{x}_*$ , i da je  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{H}_d(\mathbf{x})|_{(\mathbf{x}_*)} > 0$ , time zadovoljavamo uvjet pozitivne definitnosti funkcije. Stoga slijedi,

$$\frac{\partial \mathcal{H}_d}{\partial x_1} = \alpha \gamma x_1 - \alpha b_1 \cos(x_1) + \gamma x_3 + b_1 x_3 \sin(x_1) - P, \quad (6.31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_d}{\partial x_2} = x_2, \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_d}{\partial x_3} = \gamma x_1 - b_1 \cos(x_1) + \frac{\gamma}{\alpha} x_3. \quad (6.33)$$

Rješavanjem prethodno definiranog sustava, za željeno ravnotežno stanje  $\mathbf{x}_*$  dobivamo slijedeći uvjet

$$\alpha = -\frac{\gamma P}{b_1(\gamma x_{1*} - b_1 \cos(x_{1*})) \sin(x_{1*})}. \quad (6.34)$$

Ujedno kako bismo osigurali pozitivnu definitnost  $\mathcal{H}_d(\mathbf{x})$  u  $\mathbf{x}_*$ , slijedi

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{H}_d(\mathbf{x})|_{(\mathbf{x}_*)} = \begin{bmatrix} \alpha \gamma + \alpha b_1 \sin(x_{1*}) + b_1 x_{3*} \cos(x_{1*}) & 0 & \gamma + b_1 \sin(x_{1*}) \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma + b_1 \sin(x_{1*}) & 0 & \frac{\gamma}{\alpha} \end{bmatrix} > 0. \quad (6.35)$$

Iz Hessijana dobivamo slijedeći uvjet pozitivne definitnosti

$$-\frac{b_1}{\alpha}(\alpha b_1 \sin^2(x_{1*}) + \gamma \alpha \sin(x_{1*}) - \gamma x_{3*} \cos(x_{1*})) > 0 \quad (6.36)$$

Nakon što smo definirali sve potrebne uvjete za željeni Hamiltonian  $\mathcal{H}_d(\mathbf{x})$ , izvesti ćemo upravljački zakon kako bismo postigli asimptotsku stabilnost sustava u željenom stanju  $\mathbf{x}_*$ . S obzirom da se uvjet jednakosti (6.14) i (6.15) mora zadovoljiti, iz toga direktno slijedi

upravljački zakon

$$\beta(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}^T(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \left[ (\mathcal{J}_d - \mathcal{R}_d) \frac{\partial \mathcal{H}_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right]. \quad (6.37)$$

Podužim, ali jednostavnim računom, dolazimo do željenog upravljačkog zakona, gdje je pojačanje  $k_v \geq 0$ ,

$$u = -\alpha x_2 + \left( -\frac{b_3}{b_1} - k_v \right) \left( \gamma x_1 - b_1 \cos(x_1) + \frac{\gamma}{\alpha} x_3 \right) - b_3 \cos(x_1) + b_4 x_3 - E. \quad (6.38)$$

■

## Simulacijski rezultati

U svrhu sinteze upravljanja prethodno opisanim energetskim sustavima, tj. sinkronim generatorom, predloženi algoritam je napisan i realiziran u simboličkom programskom paketu Maple, dok je simulacija algoritma provedena u programskom paketu MATLAB. Numerička simulacija je provedena na modelu  $\Psi_s$  (6.1), definiranom u prethodnom poglavlju.

Cilj ovog rada je koristeći He'ovu perturbacijsku metodu homotopije riješiti parcijalnu diferencijalnu jednačbu, koju smo definirali na temelju IDA-PBC upravljačkog formalizma. Izbor takvog pristupa temeljimo na činjenici što navedeni formalizam pruža potpuno fizikalan uvid u domenu upravljanja nelinearnim dinamičkim sustavima. Glavna ideja navedenog pristupa je osigurati asimptotsku stabilnost sustava u željenom stanju  $\mathbf{x}_* = [x_{1*} \ 0 \ x_{3*}]^T$ .

Definirajmo sada željena stanja asimptotske stabilizacije

$$x_{1*} = 1, \ x_{2*} = 0, \ x_{3*} = 0.98. \quad (7.1)$$

Parametri sustava (6.1) su definirani prema [3]

- $b_1 = 34.29, \ b_2 = 0, \ b_3 = 0.149, \ b_4 = 0.3341,$
- $P = 28.22,$
- $E = 0.2593,$

gdje su svi parametri izraženi po jedinici (engl. *per unit*).

## Simulacijski rezultati upravljačkog algoritma prema [3]

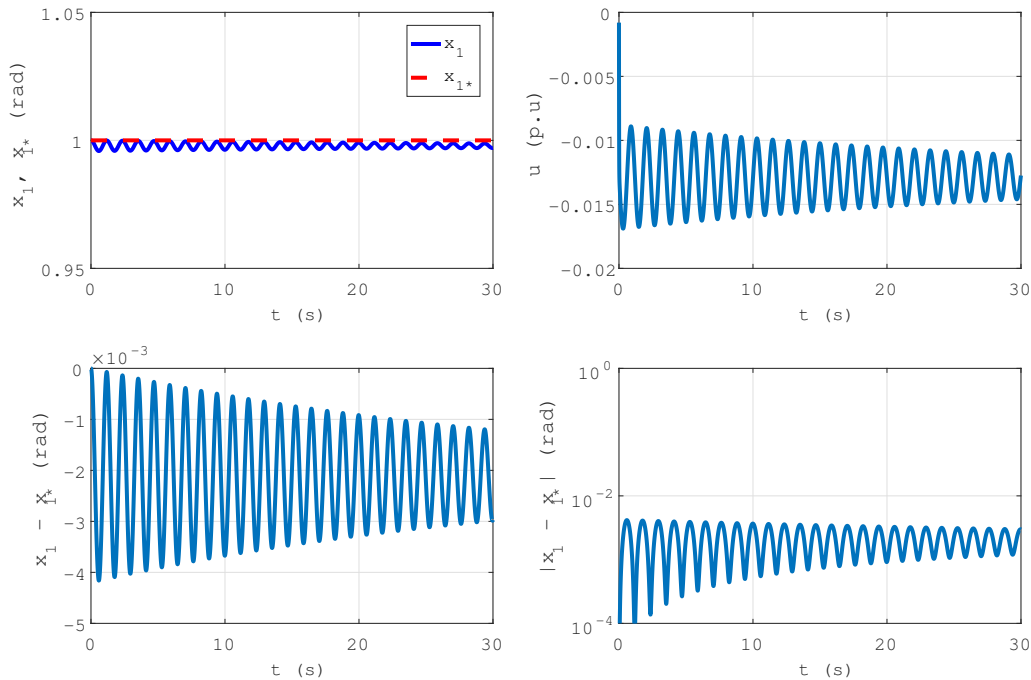
Sada ćemo prikazati simulacijske rezultate upravljačkog algoritma dobivenog u [3]

$$u = -k_v b_1 (\cos(x_{1*}) - \cos(x_1)) - \alpha_1 \alpha_2 \left( \frac{b_3}{b_1} + k_v \right) - \alpha_1 x_2 - \left( \frac{b_3}{b_1} \alpha_2 - b_4 + k_v \alpha_2 \right) \tilde{x}_3. \quad (7.2)$$

Parametri sustava su potpuno identični, a pojačanja predloženog upravljačkog algoritma su

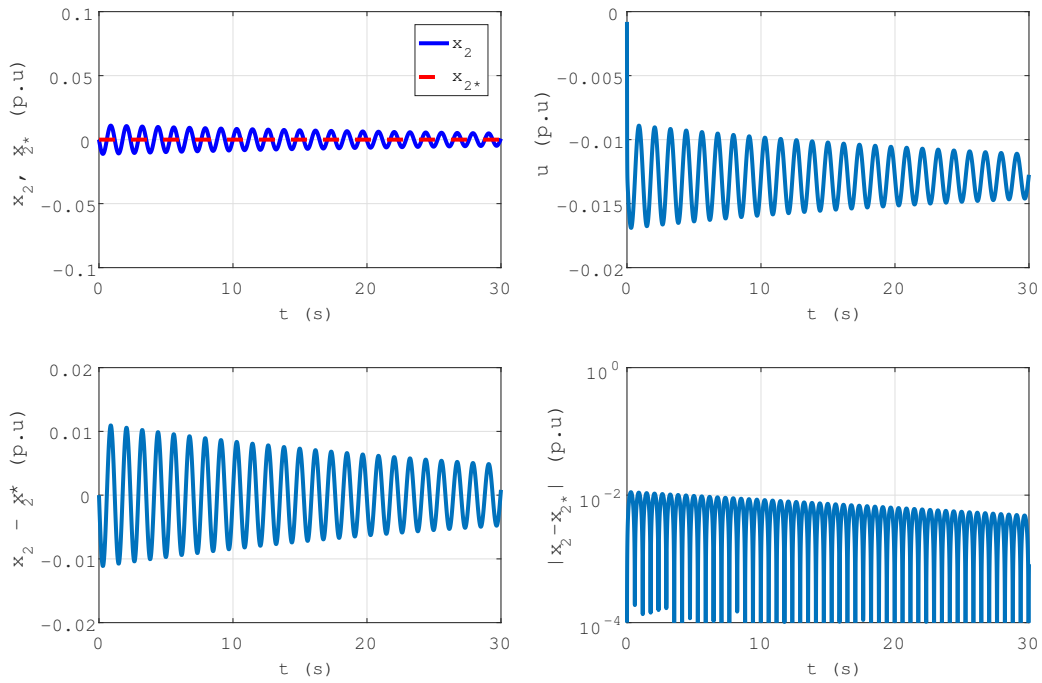
- $\alpha_1 = \frac{-b_1}{\alpha_2} = -0.6$ ,
- $\alpha_2 = \frac{b_1 b_4}{b_3} = 120$ ,
- $k_v = 1$ .

Pogledajmo sada simulacijske rezultate za varijable stanja  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ .

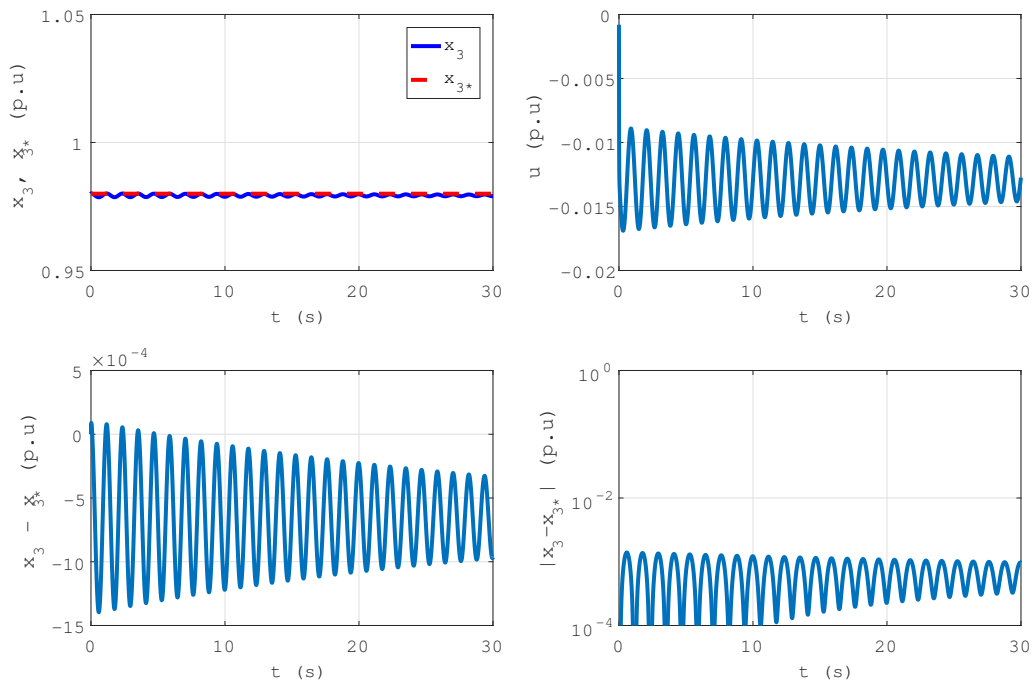


Slika 7.1: Stabilizacija varijable stanja  $x_1$  primjenom upravljačkog algoritma iz [3]

Iz priloženih grafova, vidljivo je da predloženi algoritam iz [3] relativno dobro stabilizira sustav u željenom stanju, međutim uočljivo je izrazito oscilatorno ponašanje upravljačke varijable, te upravo zbog takvog ponašanja, sve tri varijable stanja osciliraju u vremenu oko ravnotežnog stanja.



Slika 7.2: Stabilizacija varijable stanja  $x_2$  primjenom upravljačkog algoritma iz [3]



Slika 7.3: Stabilizacija varijable stanja  $x_3$  primjenom upravljačkog algoritma iz [3]



## Simulacijski rezultati predloženog upravljačkog algoritma

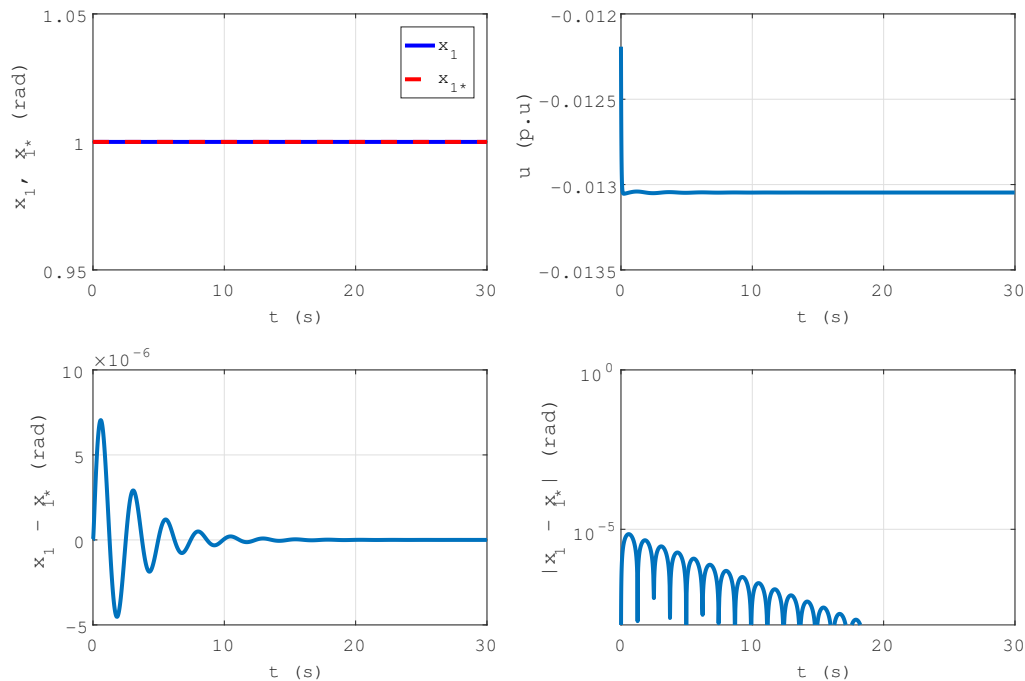
Sada ćemo prikazati simulacijske rezultate upravljačkog algoritma definiranog u prethodnom poglavlju

$$u = -\alpha x_2 + \left(-\frac{b_3}{b_1} - k_v\right) \left(\gamma x_1 - b_1 \cos(x_1) + \frac{\gamma}{\alpha} x_3\right) - b_3 \cos(x_1) + b_4 x_3 - E. \quad (7.3)$$

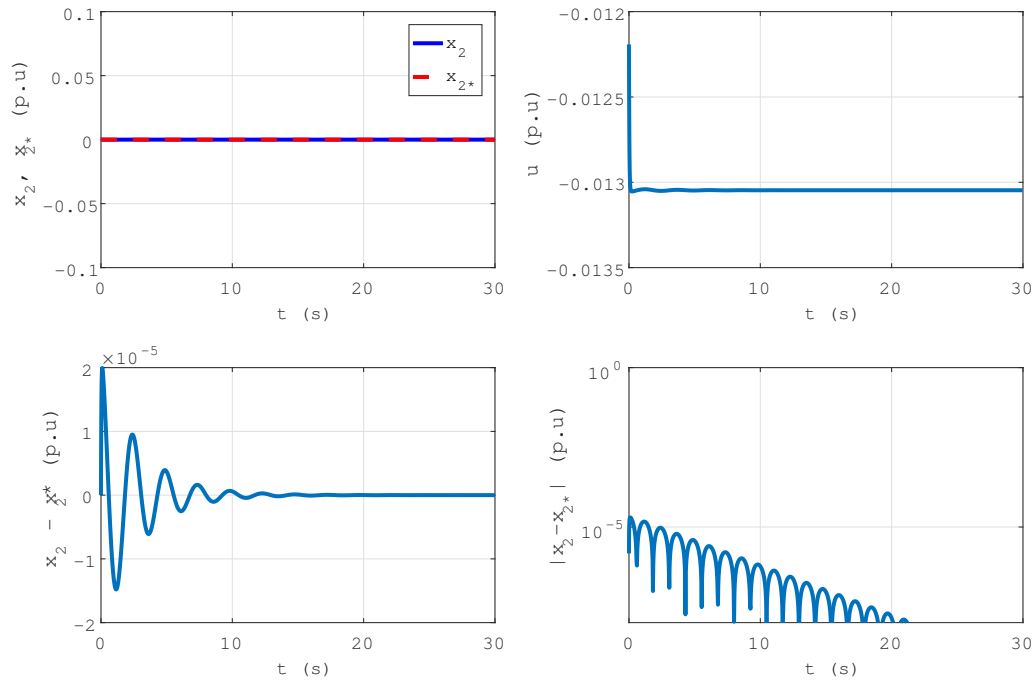
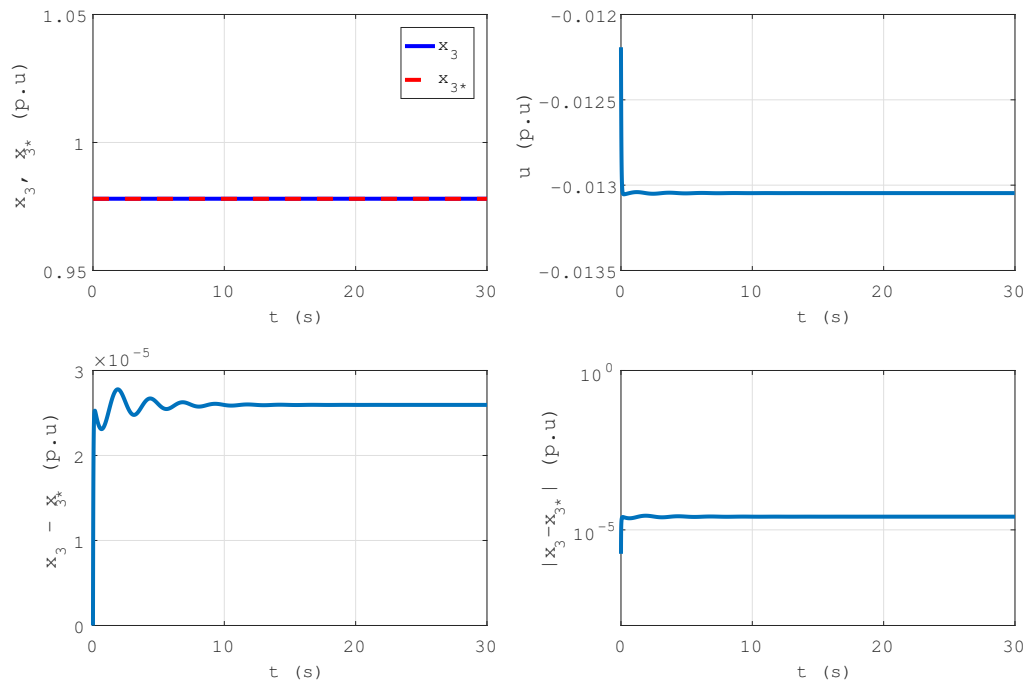
Parametri sustava su potpuno identični, a pojačanja predloženog upravljačkog algoritma su

- $\alpha = -0.44$ ,
- $\gamma = -15$ ,
- $k_v = 1$ .

Pogledajmo sada simulacijske rezultate predloženog upravljačkog algoritma za varijable stanja  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ .

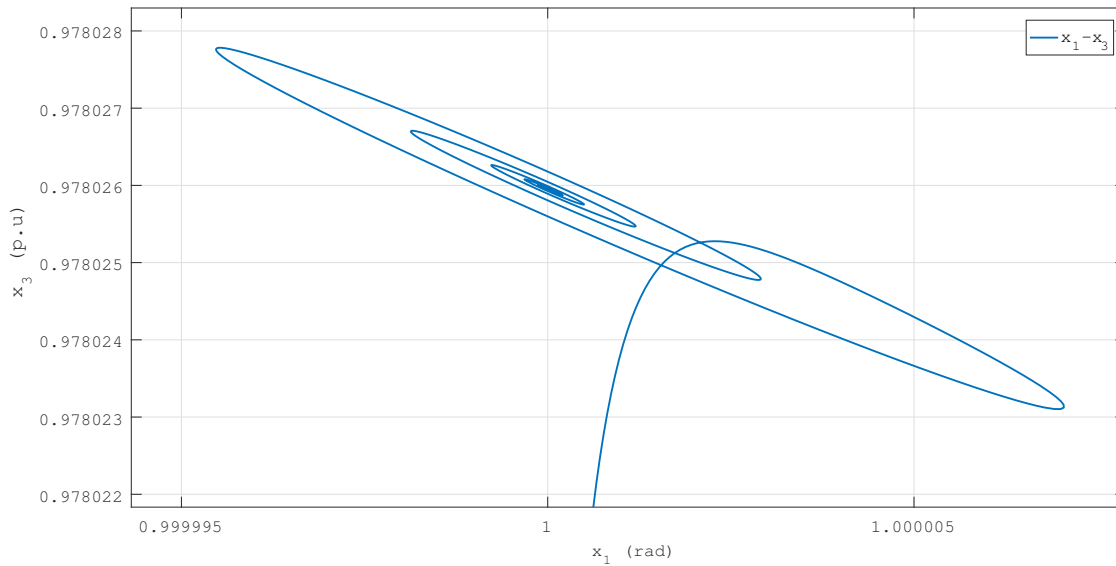


Slika 7.4: Stabilizacija varijable stanja  $x_1$  primjenom upravljačkog algoritma (7.3)


 Slika 7.5: Stabilizacija varijable stanja  $x_2$  primjenom upravljačkog algoritma (7.3)

 Slika 7.6: Stabilizacija varijable stanja  $x_3$  primjenom upravljačkog algoritma (7.3)

Odmah je uočljivo da predloženi upravljački algoritam asimptotski stabilizira sustav, tj. sve tri varijable stanja u vremenu konvergiraju u željeno stanje. Ta činjenica proizlazi, upravo iz toga što za razliku od upravljačkog algoritma definiranog u [3], predloženi algoritam nema snažno oscilatorno ponašanje.

Upravo iz faznog porterta s obzirom na varijable stanja  $x_1 - x_3$ , vidljiva je asimptotska stabilnost sustava u željenom stanju  $\mathbf{x}_* = [x_1 \ 0 \ x_3]^T$ .



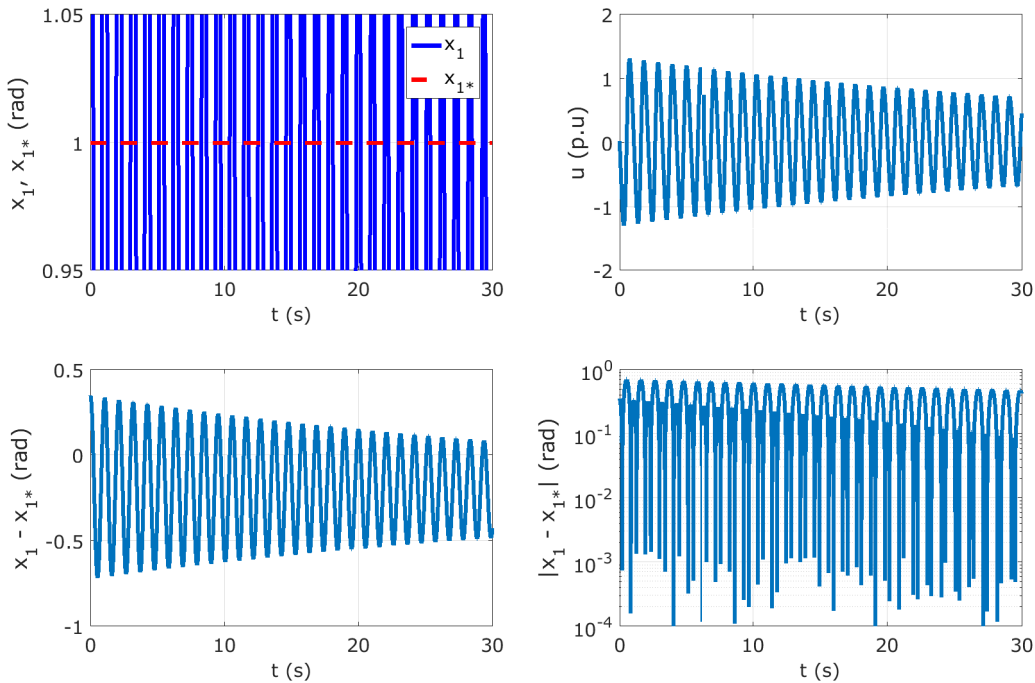
Slika 7.7: Asimptotska stabilnost sustava (6.1) primjenom upravljačkog algoritma (7.3)

## Usporedba domene atrakcije zatvorenog sustava

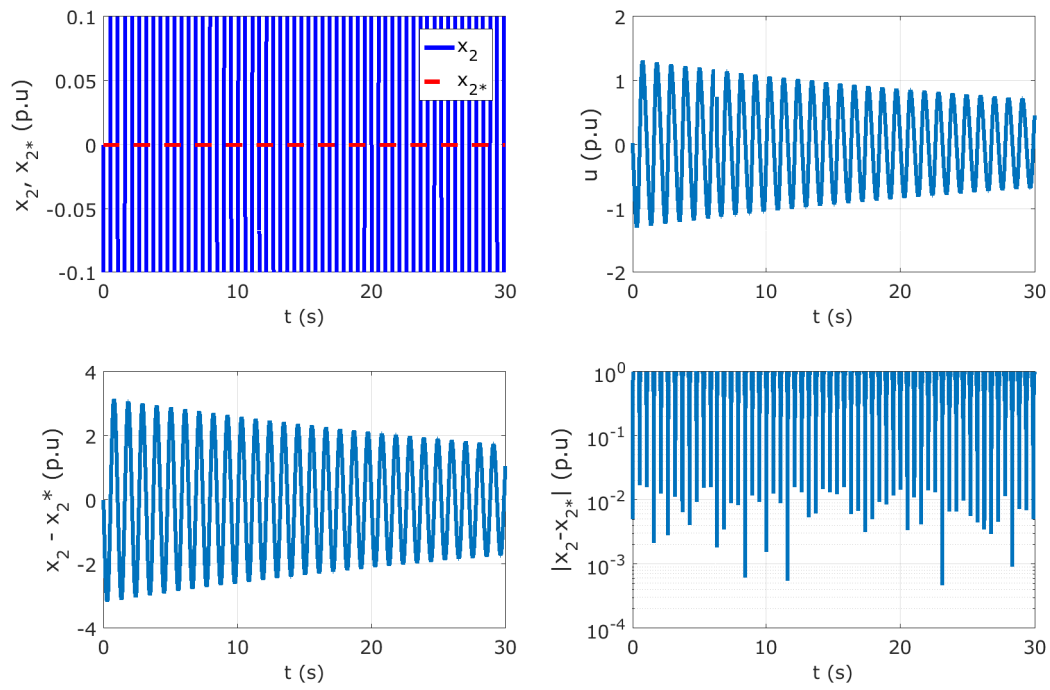
S obzirom da smo za oba upravljačka algoritma u prethodnom poglavlju početna stanja postavili upravo u ona u kojima želimo da se sustav stabilizira, promotrimo što će se dogoditi, ako početne uvjete drastično promijenimo, a željena stanja stabilizacije ostavimo nepromjenjenima.

Sada ćemo prikazati simulacijske rezultate za oba upravljačka algoritma sa početnim uvjetima definiranim na slijedeći način

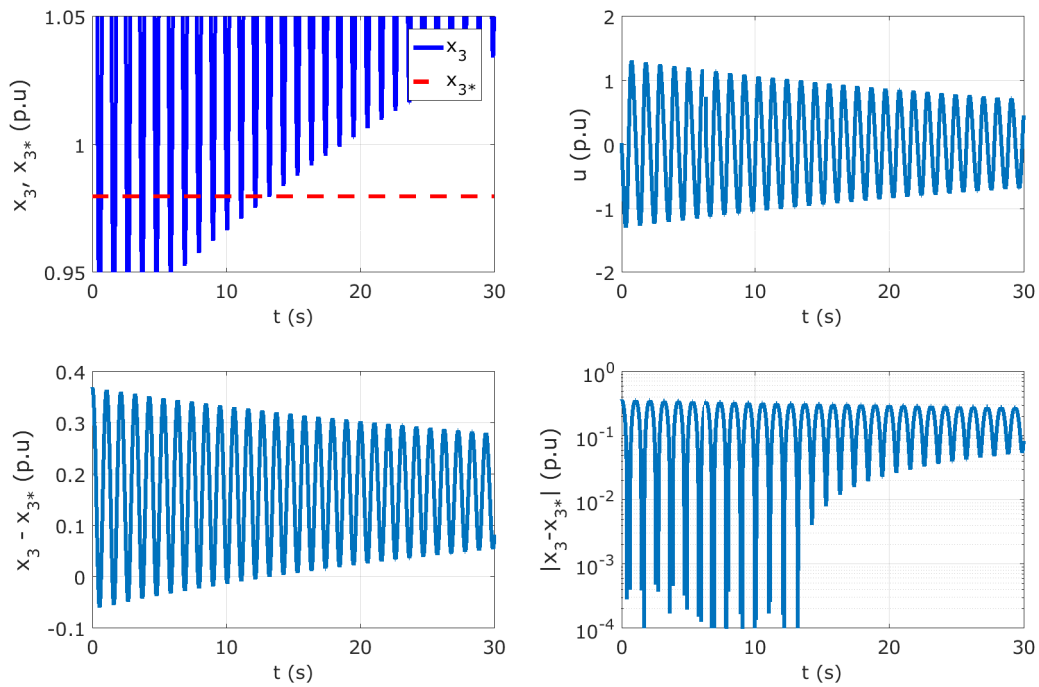
- $x_1(0) = 1.35$ ,
- $x_2(0) = 0$ ,
- $x_3(0) = 1.35$ .



Slika 7.8: Nestabilna varijabla stanja  $x_1$  primjenom upravljačkog algoritma [3]



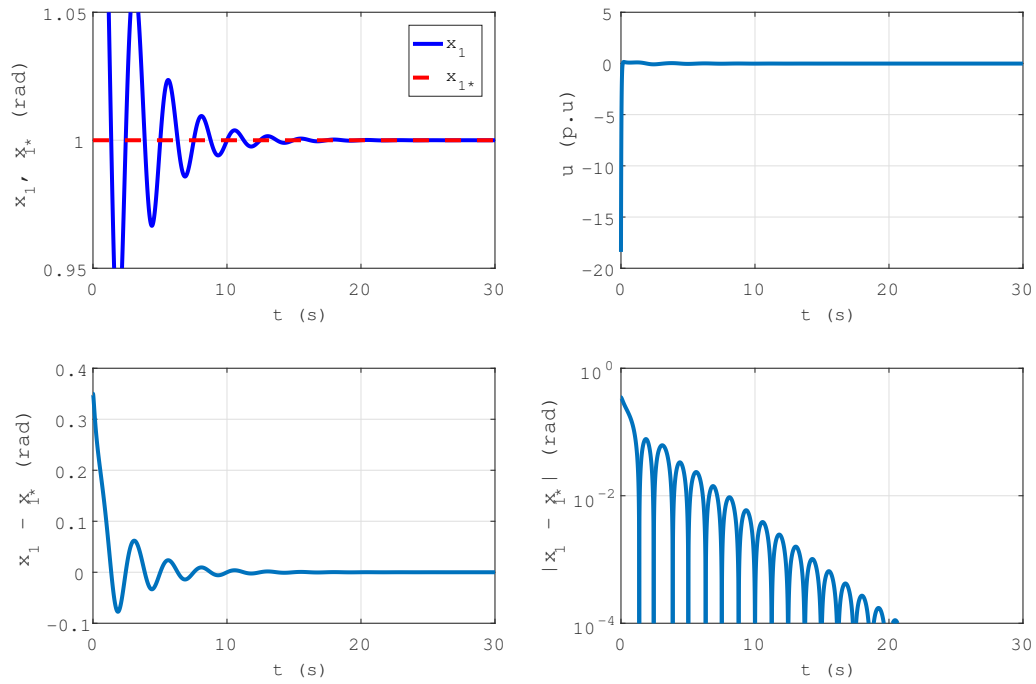
Slika 7.9: Nestabilna varijabla stanja  $x_2$  primjenom upravljačkog algoritma [3]



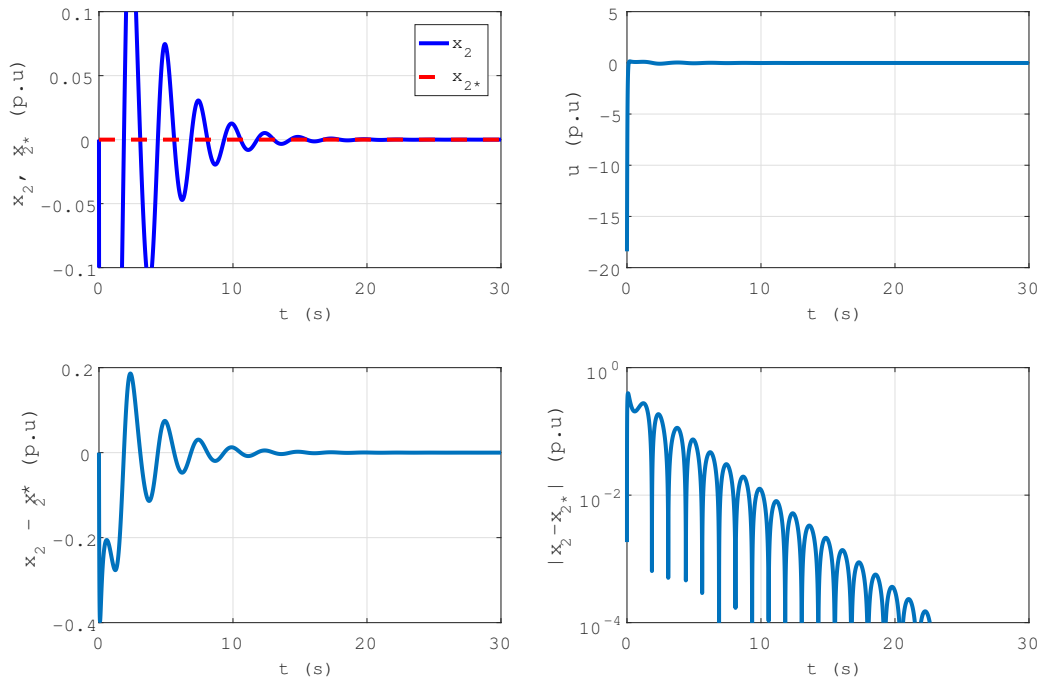
Slika 7.10: Nestabilna varijabla stanja  $x_3$  primjenom upravljačkog algoritma [3]

Iz dobivenih rezultata, uočljivo je da se sustav ponaša nestabilno, te da sve tri varijable stanja divergiraju u vremenu.

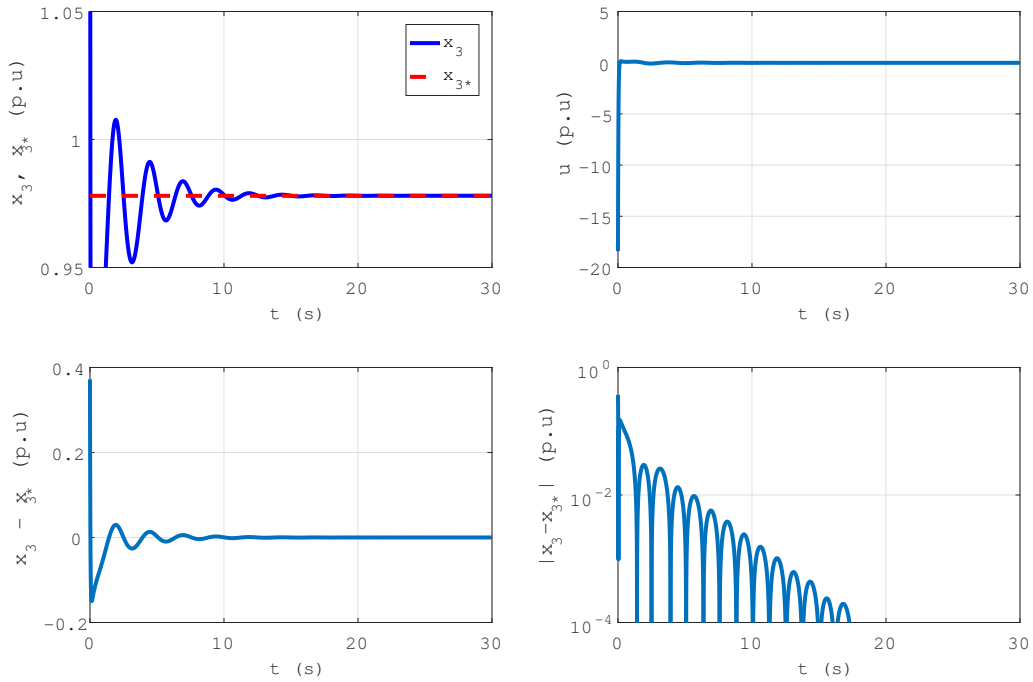
Promotrimo sada ponašanje sustava uz predloženi upravljački algoritam i nove početne uvjete.



Slika 7.11: Stabilizacija varijable stanja  $x_1$  primjenom upravljačkog algoritma (7.3)



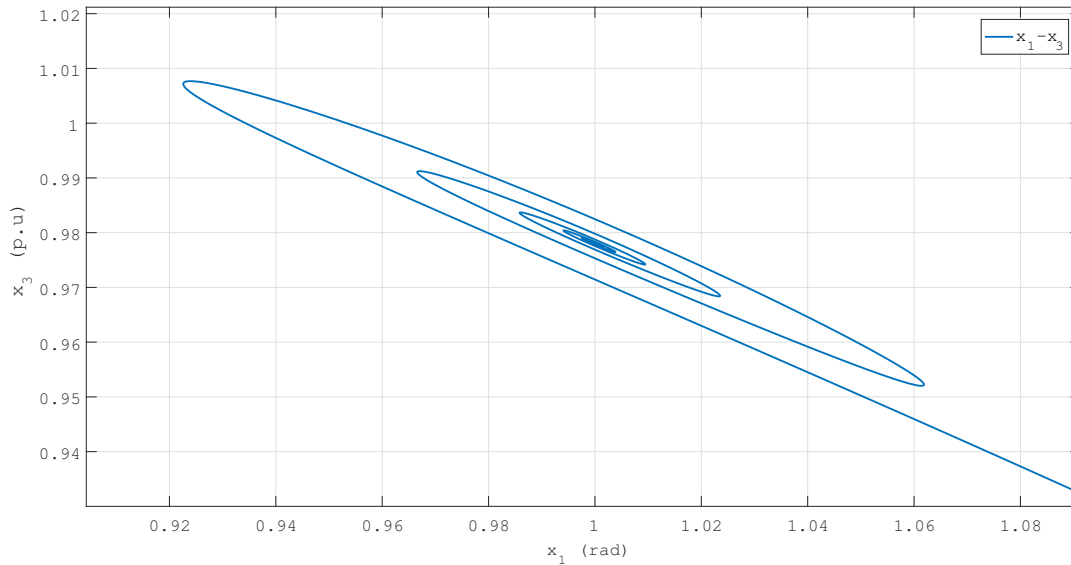
Slika 7.12: Stabilizacija varijable stanja  $x_2$  primjenom upravljačkog algoritma (7.3)



Slika 7.13: Stabilizacija varijable stanja  $x_3$  primjenom upravljačkog algoritma (7.3)

Uočljivo je iz simulacijskih rezultata da sustav i dalje asimptotski stabilizira sustav u željena stanja i uz pomaknute početne uvjete, što ima značenje da smo povećali domenu atrakcije sustava u zatvorenoj petlji.

Upravo iz faznog porterta s obzirom na varijable stanja  $x_1 - x_3$ , vidljiva je asimptotska stabilnost sustava u željenom stanju  $\mathbf{x}_* = [x_1 \ 0 \ x_3]^T$  uz pomaknute početne uvjete.



Slika 7.14: Asimptotska stabilnost sustava (6.1) primjenom upravljačkog algoritma (7.3)



## Zaključak

U ovom radu je provedena analiza nelinearnih dinamičkih sustava u Hamiltonskoj reprezentaciji. U prvom dijelu rada, obrađene su Lyapunovljeva teorija stabilnosti, koja daje nužan i dovoljan uvjet stabilnosti nelinearnih dinamičkih sustava, te teorija pasivnosti i disipativnosti nelinearnih dinamičkih sustava.

Nadalje, u ovom radu, pažnju smo posvetili, energetske sustavima, te reprezentaciji modela sinkronog generatora u port-controlled Hamiltonskom obliku. Navedeni formalizam prikazuje unutarnju strukturu modela, tj. međusobne interakcije između mehaničkog i električnog dijela analiziranog modela. Isto tako, u navedenom obliku, vidljiva je i sama domena disipativnosti realnih fizikalnih sustava.

Elegantna reprezentacija modela, u port-controlled Hamiltonskom formalizmu, daje nam mogućnost sinteze upravljačkog algoritma, na način da direktno utječemo na ukupnu energiju sustava, tj. oblikujemo na nama željen način. Tvorci navedenog formalizma R. Ortega i A. van der Schaft u svom radu [11] iz 2002. g. postavljaju temelje upravljanja nelinearnim dinamičkim sustavima, na osnovi energijskog oblikovanja dinamičkih sustava.

IDA-PBC (engl. *Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control*) upravljački algoritam se pokazao kao intuitivan i elegantan način upravljanja nelinearnim dinamičkim sustavima. Kao što smo u prethodnim poglavljima ustvrdili, najveća prepreka u navedenom pristupu je nužno rješavanje odgovarajuće parcijalne diferencijalne jednačbe, kako bismo odredili željeni Hamiltonian  $\mathcal{H}_d(\mathbf{x})$  promatranog nelinearnog modela. Za provođenje uspješne sinteze algoritma upravljanja, koristili smo He'ovu perturbacijsku metodu

homotopije, koja se pokazala kao efektivan alat u rješavanju matematičkih i fizikalnih problema. S obzirom da u IDA-PBC upravljačkom formalizmu nemamo definirane početne i rubne uvjete, nužno je bilo konstruirati novu konveksnu homotopiju  $\mathcal{H}(u, p)$ , kako bismo riješili problem nepoznavanja početnih i rubnih uvjeta, te na taj način sveli kompleksan problem, na više manjih trivijalnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Nakon dobivenog željenog Hamiltoniana  $\mathcal{H}_d(\mathbf{x})$ , odredili smo uvjete kako bi  $\mathcal{H}_d(\mathbf{x})$  imao minimum, upravo u željenom stanju, tj.  $\left. \frac{\partial \mathcal{H}_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_*)} = 0$ , te na koncu uvjet pozitivne definitnosti Hamiltoniana tj.  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{H}_d(\mathbf{x})|_{(\mathbf{x}_*)} > 0$ , kako bismo osigurali snažnu konveksnost funkcije. Upravo iz tih uvjeta smo odredili pojačanja upravljačkog zakona, te pokazali kako sve tri varijable stanja  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$  asimptotski konvergiraju u vremenu, u željeno stanje  $\mathbf{x}_* = [x_{1*}, 0, x_{3*}]$ . Pokazali smo da potpuna formulacija IDA-PBC upravljačkog algoritma preko definiranih matrica  $\mathcal{J}_d$ ,  $\mathcal{R}_d$  i lijevog anihilatora  $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})$ , daje bolje rezultate u vidu asimptotske stabilizacije sustava, nego upravljački algoritam predložen u [3], te smo u simulacijskim rezultatima ujedno pokazali kako predloženi algoritam bitno povećava domenu atrakcije sustava u zatvorenoj petlji, te time osigurava bolje performanse u različitim radnim uvjetima.

---

## Literatura

- [1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev Spaces. Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, 2003.
- [2] K. R. Desai and V. Pradhan. Solution by homotopy perturbation method of linear and nonlinear diffusion equation. *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, 3:169 – 175, 04 2013.
- [3] M. Galaz, R. Ortega, A. S. Bazanella, and A. M. Stankovic. An energy-shaping approach to the design of excitation control of synchronous generators. *Automatica*, 39(1):111 – 119, 2003.
- [4] D. D. Ganji, H. Mirgolbabaei, M. Miansari, and M. Miansari. Application of homotopy perturbation method to solve linear and non-linear systems of ordinary differential equations and differential equation of order three. *Journal of Applied Sciences*, 8:1256 – 1261, 07 2008.
- [5] A. Ghorbani. Beyond Adomian polynomials: He polynomials. *Chaos Solitons Fractals*, 39:1486–1492, 2009.
- [6] W. Haddad. *Nonlinear Dynamical Systems and Control : a Lyapunov-Based Approach*. Princeton University Press, Princeton, 2011.
- [7] J. H. He. Homotopy perturbation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178(3):257–262, 1999.

- [8] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*, volume 1. Springer-Verlag, London, 1995.
- [9] J. Kasać. *Opća teorija sustava*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2007.
- [10] A. M. Lyapunov. *The General Problem of the Stability Of Motion*. Taylor & Francis Group, 1992.
- [11] R. Ortega, A. van der Schaft, and B. M. i Gerardo Escobar. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems. *Automatica*, 38(4):585 – 596, 2002.
- [12] M. Pai. *Energy Function Analysis for Power System Stability*. Kluwer Academic Publishers., Boston, MA, 1989.
- [13] A. V. D. Schaft.  *$\mathcal{L}_2$ -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Springer-Verlag, London, 2000.
- [14] E. Sohrab, S. N. Hassan, and S. Mohammad. An improvement to the homotopy perturbation method for solving the Hamilton–Jacobi–Bellman equation. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 30(4):487 – 506, 2013.